

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

L'étude de la théorie d'Öpik et de son extension

Monfort, Céline

Award date:
2017

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

L'ETUDE DE LA THEORIE D'OPIK ET DE SON EXTENSION

Promoteur : Anne Lemaître

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences mathématiques à finalité didactique

Céline MONFORT

Juin 2017

Remerciements

En préambule de ce mémoire, je souhaite présenter mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Anne Lemaître, promotrice de ce mémoire, pour l'aide apportée et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer. Sans son écoute concernant mes souhaits de ce mémoire et la confiance qu'elle m'a accordé, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Merci également pour son aide dans la réalisation de mes projets durant mon parcours universitaire.

Je remercie également Benoît Noyelles pour sa disponibilité, son écoute, ses conseils judicieux et le temps qu'il a bien voulu me consacrer, et sans qui l'élaboration de ce mémoire aurait été difficile.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury d'avoir accepté de juger mon travail et d'avoir consacré du temps à la lecture de celui-ci.

Au terme de mes études, je souhaite adresser mes remerciements au corps professoral et administratif du Département de Mathématique de l'Université de Namur pour le temps qu'ils nous ont consacré afin de nous offrir une formation riche et de qualité.

Je remercie également tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenue et encouragée tout au long de mes études ainsi que dans la réalisation de mon mémoire. Un grand merci à mes camarades de deuxième master pour leur soutien précieux.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents ainsi qu'à mon frère et mes sœurs qui ont toujours cru en moi et qui m'ont toujours encouragée. Plus particulièrement, je souhaite remercier mon compagnon, Jérôme Rousseau, pour son soutien infini et son encouragement dans les moments les plus difficiles de mes études.

Enfin, je tiens à remercier ma belle-soeur, Anaïs Rousseau, pour sa relecture attentive et minutieuse de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

Céline Monfort

Résumé

Dans le cadre de l'étude de la dynamique de notre Système solaire, nous sommes parfois amenés à étudier des rapprochements entre des corps célestes de masses différentes et orbitant un même corps central. Lors de ce rapprochement, le corps possédant la plus petite masse est attiré par l'autre corps. Il dévie alors de sa trajectoire initiale et son orbite est modifiée. La théorie d'Öpik, présentée dans ce mémoire, apporte une résolution analytique à ce changement d'orbite. En effet, elle établit les expressions des éléments orbitaux de la nouvelle orbite du corps de masse négligeable grâce à ceux de l'ancienne orbite. Une démarche à peu près inverse est également présentée dans ce mémoire sous le terme "d'extension de la théorie d'Öpik". Celle-ci nous permet de déterminer les expressions des éléments orbitaux angulaires du corps de masse négligeable avant le rapprochement, donnant lieu à une orbite souhaitée après le rapprochement. Enfin, une application de cette théorie et de son extension est réalisée sur deux exemples. Le premier est le rapprochement entre l'astéroïde Apophis et la Terre. Le deuxième concerne les changements de trajectoire de la sonde JUICE lors de son passage à proximité de Callisto dans le cadre de la mission du même nom visant à explorer le voisinage de Jupiter.

Mots-clés : *Rapprochement de deux corps ; Dynamique céleste ; Théorie D'Öpik ; Extension de la théorie d'Öpik.*

Abstract

In the context of the study of our Solar System dynamics, we must sometimes concerned by the study of close-encounter between celestial bodies of different masses orbiting a same body. At this close-encounter, the body with the smallest mass is attracted by the other one. Then the smallest one is deviated from its initial trajectory and its orbit is modified. In this master's thesis, the presented Öpik's theory brings an analytical resolution to this orbit's modification. Indeed, thanks to the old orbital elements expressions of the body with negligible mass, Öpik's theory fixes those of its new orbit. A nearly inverse approach is also presented in this master's thesis under the expression "extension of the Öpik's theory". This one determines the pre-encounter angular orbital elements of the body with the negligible mass giving rise to a wished post-encounter orbit. Finally, an application of this theory and its extension is realized through two examples. The first one is the encounter between the Apophis asteroid and the Earth. The second one concerns the probe JUICE trajectory changes during its passage near Callisto. And this, within the same name's mission that's focus on exploring the Jupiter's average.

Keywords : *Close-encounter ; Celestial dynamics ; Öpik's theory ; Extended Öpik's theory.*

Table des matières

1	Les rappels	3
1.1	La latitude et la longitude d'un corps céleste	3
1.2	Le changement de repère	4
2	Le problème des deux corps	9
2.1	La présentation du problème	9
2.2	Le mouvement relatif	10
2.3	Les intégrales premières du mouvement	13
2.4	Le mouvement keplerien du corps	16
2.5	L'orbite elliptique du corps	18
2.6	L'orbite hyperbolique du corps	24
3	Le problème des trois corps restreint circulaire	27
3.1	La présentation du problème	27
3.2	Le mouvement autour du centre de masse du système	28
3.3	Le mouvement de deux corps autour du troisième	29
4	La théorie d'Öpik	33
4.1	Le modèle analytique du problème	33
4.2	Les positions des deux corps hors rencontre	34
4.3	L'entrée dans la sphère d'influence	38
4.4	L'approche du contournement	40
4.5	Le lieu de la rencontre	44
4.6	Le changement instantané de trajectoire du petit corps	49
4.7	La nouvelle orbite du petit corps après le contournement	57
5	L'extension de la théorie d'Öpik	63
5.1	Les conditions donnant l'élément orbital a'_* souhaité	63
5.2	Les conditions donnant les valeurs a'_* , e'_* et i'_* souhaitées	66
6	Les applications	71
6.1	Le contournement de la Terre par l'astéroïde (99942) Apophis	71
6.2	Les contournements de Callisto par la sonde spatiale JUICE	74
6.3	Les contournements de Callisto par la sonde JUICE pour établir un algorithme général	78
6.3.1	Le troisième contournement	80
6.3.2	Les premier, deuxième et troisième contournements	82
6.3.3	Le choix d'un critère de sélection pour l'anomalie vraie	84

A	L'expression du vecteur vitesse planétocentrique	93
A.1	Les expressions dans le repère héliocentrique	93
A.2	Les expressions dans le repère en mouvement	97
A.3	Les expressions selon les éléments orbitaux	99
B	Les détails des calculs	103
B.1	Les expressions des trois premières variables d'Öpik en fonction des éléments orbitaux	103
B.2	La distance entre le petit corps et la planète	105
B.3	Le carré de la distance au temps t_b	106
B.4	Le vecteur position dans le repère lié au b-plan	106
B.5	L'expression du sinus de la nouvelle variable θ'	107
B.6	La position du petit corps après rencontre dans le repère planétocentrique	108
B.7	La position du petit corps dans le repère lié au b'-plan	110
C	L'expression des fonctions trigonométriques de l'angle γ	115
C.1	Le lien avec les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole	115
C.2	Les expressions selon la norme U et le paramètre d'impact	118
D	La suite des détails des calculs	121
D.1	L'équation du cercle perpendiculaire à l'axe \vec{X}	121
D.2	L'équation du cercle perpendiculaire à l'axe \vec{Z}	122
D.3	Le système composé des trois équations du cercle	123

Introduction

Depuis toujours, notre Système solaire attire la curiosité et l'intérêt des scientifiques. Ces derniers ne cessent d'approfondir leurs connaissances et de l'explorer. Ils s'intéressent notamment à la dynamique décrivant les mouvements des objets célestes composant notre Système solaire. Parmi ceux-ci, nous trouvons le Soleil, les planètes et leurs satellites naturels, les ceintures d'astéroïdes traversant notre Système solaire, les satellites artificiels autour de la Terre, les sondes spatiales d'exploration, etc. Tous ces objets ne se déplacent pas de manière quelconque dans l'espace. Leurs mouvements sont dictés par les différentes interactions gravitationnelles présentes entre eux dans le Système solaire. L'étude de ces mouvements permet alors de connaître la trajectoire, aussi appelée l'orbite, de ces différents objets de notre Système solaire.

Certains objets célestes, tels que les astéroïdes ou les sondes spatiales d'exploration, sont amenés à croiser le chemin d'autres corps célestes possédant une masse plus grande qu'eux. Ils peuvent alors soit entrer en collision, soit se rapprocher. Dans le deuxième cas, étant donné qu'un des deux corps est plus massif que l'autre, ce rapprochement entraîne une importante attraction gravitationnelle sur cet autre corps. Il voit alors sa trajectoire dévier fortement.

La théorie d'Öpik étudie cette déviation de trajectoire survenant à la suite d'un rapprochement entre un corps de petite masse et un corps de masse plus importante orbitant le même corps central. Pour cela, elle considère que le premier corps est de masse négligeable et qu'il orbite autour d'un troisième corps massif, et que le deuxième corps se déplace sur une orbite circulaire autour de ce troisième corps massif. Elle détermine alors la nouvelle orbite du corps de masse négligeable après son rapprochement avec le deuxième corps en étudiant de manière locale l'impact de l'attraction gravitationnelle de ce dernier sur l'orbite du premier. En effet, cet impact entraîne un changement instantané dans le mouvement du corps. Celui-ci est déterminé, dans la théorie d'Öpik, de manière analytique grâce à un formalisme particulier introduit par Ernst Julius Öpik dans son ouvrage *Interplanetary Encounters* en 1976. Ensuite, elle en déduit, de manière globale, la nouvelle orbite du corps de masse négligeable. Nous noterons que cette déviation de trajectoire du corps de masse négligeable peut être vu comme un contournement autour du deuxième corps.

E.J. Öpik n'est pas le seul à avoir contribué à la construction de la théorie d'Öpik présentée dans ce mémoire. En effet, d'autres scientifiques, tels que A. Carusi, R. Greenberg et G.B. Valsecchi, y ont également participé. De plus, G.B. Valsecchi et al. présente une extension de cette théorie d'Öpik dans leur article de 2015, [17]. Il propose de travailler sur base du type d'orbite souhaitée après le rapprochement entre les deux corps concernés. Cette extension nous permet alors de déterminer l'orbite que devrait avoir le corps de masse négligeable avant ce rapprochement afin de se déplacer sur cette orbite souhaitée après le rapprochement.

Le premier objectif de ce mémoire est donc de présenter, de manière complète et détaillée, la théorie d'Öpik et son extension sur base, notamment, du travail effectué par G.B. Valsecchi et

al. dans leur article [17] de 2015. Le second objectif est d'implémenter les différents résultats de la théorie d'Öpik et de son extension pour tester notre compréhension et nos codes. Pour cela, nous appliquerons notre implémentation sur les deux exemples proposés par G.B. Valsecchi dans ce même article et nous comparerons nos résultats à ceux-ci. Enfin, le troisième objectif de ce mémoire est de déterminer un algorithme général permettant l'application de la théorie d'Öpik sur un cas inconnu de rapprochement entre deux corps.

Nous commencerons par quelques rappels afin d'aider le lecteur à comprendre notre construction de la théorie d'Öpik. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous introduirons la dynamique présente dans le problème des deux corps et nous détaillerons les mouvements du type elliptique et hyperbolique. Nous utiliserons notamment ce deuxième type de mouvement dans l'étude locale du changement d'orbite du corps de masse négligeable. Le troisième chapitre constituera une présentation de la dynamique du problème des trois corps.

Une fois l'ensemble de ces notions installées, nous passerons à la présentation de la théorie d'Öpik au quatrième chapitre. Cette présentation suivra pas à pas le corps de masse négligeable dans son approche du deuxième corps, puis dans le changement de direction de son mouvement, et enfin dans son déplacement sur sa nouvelle orbite. À chaque étape, nous déterminerons analytiquement les éléments permettant la construction de la prochaine étape.

Ensuite, nous nous concentrerons sur l'extension de la théorie d'Öpik proposée par G.B. Valsecchi et al. dans leur article [17] de 2015. Nous partirons donc du type d'orbite souhaité pour le corps de masse négligeable après son contournement du deuxième corps. Nous déroulerons alors la construction de la théorie d'Öpik dans le sens contraire afin de déterminer l'orbite du corps de masse négligeable avant le rapprochement.

Enfin, nous implémenterons cette extension de la théorie d'Öpik de le but de l'appliquer sur deux cas concrets. Le premier est l'approche de l'astéroïde Apophis, traversant le Système solaire, aux alentours de la Terre en 2029. Le deuxième cas est issu de la mission JUICE, prévue pour 2029, explorant le voisinage de Jupiter. Dans celle-ci, la sonde spatiale d'exploration, nommée également JUICE, va changer plusieurs fois d'orbites, notamment suite à ses rapprochements avec Callisto. Ce deuxième cas nous servira également de lieu de comparaison et de cas d'application pour notre implémentation de la théorie d'Öpik.

Chapitre 1

Les rappels

Nous débutons notre étude sur la théorie d'Öpik par un ensemble de rappels de notions que nous allons utiliser par la suite. La première notion présentée, sur base du cours [5] de Luc Duriez, est celle de la latitude et de la longitude d'un corps. Nous verrons comment définir ces deux éléments, ainsi que leur rôle dans la détermination de la position d'un corps, dans le premier point. Ensuite, dans la deuxième partie, nous aborderons la notion de changement de repère en utilisant les notions abordées dans le cours d'Algèbre [8] d'Anne Lemaître. Nous étudierons alors son fonctionnement dans un cas général avant de l'appliquer à un cas de changement s'effectuant grâce à une matrice de rotation.

1.1 La latitude et la longitude d'un corps céleste

Nous commençons par décrire les notions de longitude et de latitude d'un corps céleste en nous basant sur le cours de Mécanique céleste classique [5] de Luc Duriez. Ces deux mesures permettent de repérer le corps céleste dans l'espace par rapport à un point. Ce dernier pouvant désigner un autre corps, nous présentons les notions de longitude et de latitude du corps céleste par rapport à un deuxième corps.

Tout d'abord, nous prenons une sphère centrée sur le deuxième corps et dont le rayon équivaut à la distance entre les deux corps. De cette manière, le premier corps se situe sur cette sphère. Ensuite, nous nous munissons d'un repère orthonormé qui a pour origine le deuxième corps. Dans celui-ci, les deux premiers axes intersectent la sphère en un cercle que nous nommons, en empruntant le terme à Luc Duriez dans [5], "cercle de base".

Grâce à cette construction, nous sommes en mesure de définir la latitude du corps céleste comme étant l'angle entre sa position sur la sphère et sa projection sur le cercle de base. Sa longitude est alors l'angle entre le premier axe du repère orthonormé et cette projection sur le cercle de base. Ces mesures, ainsi que le cercle de base, sont représentés à la FIGURE 1.1.

Nous constatons également que la longitude et la latitude du corps céleste peuvent jouer le rôle des angles dans ses coordonnées sphériques. La troisième coordonnée est alors la distance entre les deux corps. En notant cette dernière r_1 , la longitude du corps λ_1 et sa latitude β_1 , nous pouvons exprimer, dans le repère orthonormé, les coordonnées cartésiennes du corps, notées x_1 ,

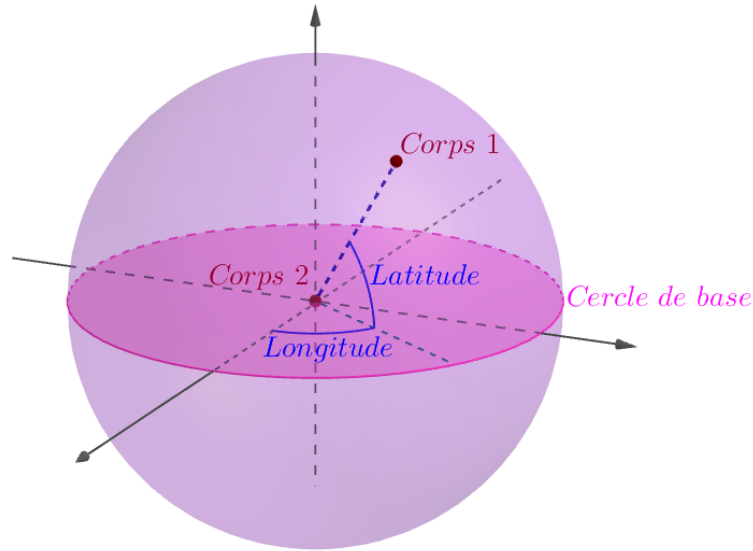


FIGURE 1.1 – Représentation de la longitude et de la latitude du premier corps par rapport au deuxième corps dans un repère orthonormé. Le cercle de base permettant la construction de la longitude et de la latitude est également représenté.

x_2 et x_3 , en fonction de sa longitude et de sa latitude. Celles-ci sont

$$\begin{cases} x_1 &= r_1 \cos \lambda_1 \cos \beta_1 \\ x_2 &= r_1 \sin \lambda_1 \cos \beta_1 \\ x_3 &= r_1 \sin \beta_1. \end{cases}$$

1.2 Le changement de repère

Nous allons à présent rappeler le fonctionnement d'un changement de repère dans un espace vectoriel en utilisant les conventions d'écriture introduites dans le cours d'Algèbre d'Anne Lemaître [8]. Étant donné que nous appliquerons des changements de repère uniquement dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , nous travaillons directement dans cet espace pour présenter ce rappel. Dans celui-ci, nous définissons un repère à l'aide d'une origine et de trois vecteurs de base, représentant les axes du repère. Nous étudions alors le changement permettant de passer d'un premier repère, noté e , à un deuxième repère, noté ϵ . Les vecteurs de base de ces deux repères sont respectivement $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ et $\{\vec{\epsilon}_j\}_{j=1}^3$.

Dans un premier temps, nous considérons que le changement de repère est quelconque. Désirant étudier le passage du repère e vers le repère ϵ , nous exprimons les vecteurs de base du premier repère dans le second. Pour $i = 1, 2, 3$, nous avons

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 c_{ji} \vec{\epsilon}_j$$

où les coefficients c_{ji} sont les composantes des vecteurs $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ exprimés dans le repère ϵ . Nous

pouvons également écrire cette relation comme étant

$$(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = (\vec{\epsilon}_1 \ \vec{\epsilon}_2 \ \vec{\epsilon}_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [e] = [\epsilon] [id]_e^\epsilon$$

où $[e]$ représente la matrice des vecteurs de base du repère e , $[\epsilon]$ désigne celle des vecteurs de base du repère ϵ , et celle des coefficients c_{ji} est notée $[id]_e^\epsilon$.

Cette dernière matrice caractérise le changement des composantes de n'importe quel vecteur dans \mathbb{R}^3 lors de son passage du repère e vers le repère ϵ . En effet, pour un vecteur \vec{x} quelconque dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons déterminer ses composantes dans les deux repères. Dans le premier repère e , nous notons ses composantes comme étant α_i ; dans le second repère, nous les notons comme étant β_j . Dès lors, la décomposition du vecteur \vec{x} dans le repère ϵ est

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^3 \beta_j \vec{\epsilon}_j.$$

Dans le repère e , elle s'écrit

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i.$$

Dans cette dernière décomposition, nous exprimons les vecteurs de base du repère e dans le repère ϵ afin de déterminer le lien entre les composantes α_i et β_j . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sum_{j=1}^3 c_{ji} \vec{\epsilon}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ji} \alpha_i \vec{\epsilon}_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \beta_j \vec{\epsilon}_j. \end{aligned}$$

De cette manière, nous remarquons que, dans les deux dernières égalités,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$= [id]_e^\epsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons encore écrire les composantes du vecteur \vec{x} dans le repère ϵ sur base de celles dans le repère e comme

$$[\vec{x}]^\epsilon = [id]_e^\epsilon [\vec{x}]^e$$

où $[\cdot]^e$ et $[\cdot]^\epsilon$ désignent les composantes du vecteur \vec{x} , respectivement dans les repères e et ϵ . En procédant selon le même raisonnement, les composantes du vecteur \vec{x} dans le repère e en fonction de celles dans le repère ϵ s'écrivent

$$[\vec{x}]^e = [id]_\epsilon^e [\vec{x}]^\epsilon.$$

où la matrice $[id]_\epsilon^e$ est l'inverse de la matrice $[id]_e^\epsilon$.

Dans un deuxième temps, nous réduisons le changement de repère à une rotation entre le repère e et le repère ϵ . Celle-ci s'effectue selon un certain angle autour d'un axe \vec{u} qui reste immobile durant la rotation. La matrice caractérisant ce changement de repère est donc une matrice de rotation de cet angle autour de l'axe de rotation. De manière générale, pour un angle Θ et un axe de rotation unitaire \vec{u} , cette matrice est

$$R_{\vec{u}}(\Theta) = \begin{pmatrix} u_1^2(1 - \cos \Theta) + \cos \Theta & u_1 u_2(1 - \cos \Theta) - u_3 \sin \Theta & u_1 u_3(1 - \cos \Theta) + u_2 \sin \Theta \\ u_1 u_2(1 - \cos \Theta) + u_3 \sin \Theta & u_2^2(1 - \cos \Theta) + \cos \Theta & u_2 u_3(1 - \cos \Theta) - u_1 \sin \Theta \\ u_1 u_3(1 - \cos \Theta) - u_2 \sin \Theta & u_2 u_3(1 - \cos \Theta) + u_1 \sin \Theta & u_3^2(1 - \cos \Theta) + \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où u_1 , u_2 et u_3 sont les composantes du vecteur unitaire \vec{u} . Ces composantes respectent donc

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Dans le cas particulier d'une rotation s'effectuant autour d'un des trois axes du repère, la matrice de rotation se simplifie. En effet, celle-ci devient, pour une rotation d'un angle Θ se déroulant respectivement autour du premier, du second et du troisième axe du repère,

$$R_1(\Theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix};$$

$$R_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix};$$

$$R_3(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la même manière que dans le cas général, nous cherchons à établir le lien entre les composantes d'un vecteur quelconque de l'espace, exprimées dans le repère e , avec celles relatives au repère ϵ . Nous travaillons avec une rotation, entre les deux repères, d'un angle Θ autour du troisième axe du repère e . Celle-ci est représentée sur la FIGURE 1.2.

Les vecteurs de base du repère ϵ s'obtiennent alors grâce à la matrice de rotation $R_3(\Theta)$ appliquée aux vecteurs de base du repère e .

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) &= (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) R_3(\Theta) \\ \Leftrightarrow [\epsilon] &= [e] R_3(\Theta). \end{aligned}$$

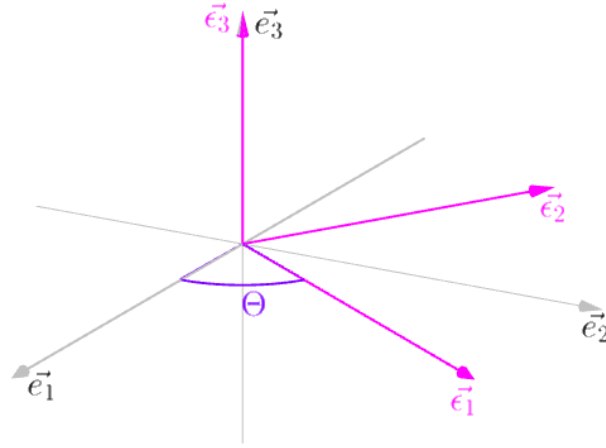


FIGURE 1.2 – Représentation de la rotation effectuée pour passer du repère e , dont les axes sont $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$, au repère ϵ , dont les axes sont $\{\vec{\epsilon}_j\}_{j=1}^3$. Cette rotation d'angle Θ s'effectue autour du troisième axe du repère e .

Par conséquent, la matrice $[id]_\epsilon^e$ caractérisant le changement des composantes d'un vecteur quelconque dans \mathbb{R}^3 , lors de la rotation passant du repère e au repère ϵ , est $R_3(\Theta)$. Pour le vecteur \vec{x} , quelconque dans \mathbb{R}^3 , ses composantes dans le repère e sont, sur base de celles dans le repère ϵ ,

$$\begin{aligned} [\vec{x}]^e &= [id]_\epsilon^e [\vec{x}]^\epsilon \\ &= R_3(\Theta) [\vec{x}]^\epsilon. \end{aligned}$$

Inversement, ses composantes dans le repère ϵ , sur base de celles dans le repère e , sont

$$\begin{aligned} [\vec{x}]^\epsilon &= [id]_e^\epsilon [\vec{x}]^e \\ &= [R_3(\Theta)]^{-1} [\vec{x}]^e. \end{aligned}$$

Or, les matrices de rotation sont des matrices orthogonales. L'inverse d'une telle matrice correspond à sa transposée. Dans notre cas, la transposée de $R_3(\Theta)$ est

$$\begin{aligned} R_3(\Theta)^T &= \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= R_3(-\Theta). \end{aligned}$$

Nous noterons que ce résultat est également valable pour les matrices de rotation autour du premier et du deuxième axe du repère. Les composantes de notre vecteur \vec{x} dans le repère ϵ sont donc

$$[\vec{x}]^\epsilon = [R_3(-\Theta)] [\vec{x}]^e.$$

Nous savons à présent déterminer les composantes d'un vecteur de \mathbb{R}^3 quelconque suite à un changement de repère.

Chapitre 2

Le problème des deux corps

Notre Système solaire est composé de nombreux corps célestes en interaction les uns avec les autres. Leur mouvement est d'ailleurs dicté par ces interactions. Le plus simple des mouvements à étudier dans le Système solaire est celui de deux corps en interaction mutuelle. Nous allons de ce fait présenter ce mouvement, plus connu sous l'appellation de "problème des deux corps". Nous nous basons sur le cours de Mécanique céleste classique [5] de Luc Duriez, sur celui de Dynamique céleste et résonances [15] de Benoît Noyelles et sur celui de Mécanique du point et du solide [9] d'Anne Lemaître, ainsi que sur le deuxième chapitre du livre de C.D. Murray et S.F. Dermott [10]. Notre étude du problème des deux corps est une compilation du contenu de ces trois cours et de ce livre. Nous commencerons celle-ci par la présentation du problème. Ensuite, nous le simplifierons en considérant le mouvement des deux corps par rapport à leur centre de masse dans la deuxième partie. Dans cette même partie, nous confondrons ce dernier avec le corps le plus massif. Nous déterminerons alors le mouvement du deuxième corps par rapport au premier. Dans la troisième partie, nous présenterons les intégrales premières de ce mouvement. Nous en déduirons, dans le quatrième point, l'expression du mouvement keplerien du corps en mouvement et nous l'associerons à celle d'une conique. Enfin, dans les dernières parties, nous détaillerons plus particulièrement les caractéristiques d'un mouvement keplerien elliptique ou hyperbolique.

2.1 La présentation du problème

Nous commençons par présenter les équations décrivant le mouvement, par rapport à une origine fixe, de deux corps en interaction gravitationnelle. Nous travaillons dans un système isolé composé de ces deux corps et nous dotons ce système d'un repère galiléen¹. Celui-ci est représenté à la FIGURE 2.1, sur laquelle l'origine est notée O . Nous repérons également les deux corps, P_0 et P_1 , en interaction gravitationnelle.

Ces deux corps, de masses m_0 et m_1 kilogrammes, ont un mouvement, par rapport à l'origine du repère galiléen, dicté par leurs interactions gravitationnelles mutuelles. De plus, grâce aux lois d'interaction gravitationnelle de Newton, les équations du mouvement de ces deux corps par

1. Dans ce repère, aussi appelé le repère inertiel, le principe d'inertie est satisfait.

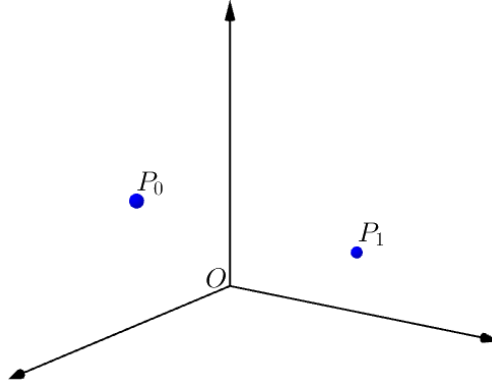


FIGURE 2.1 – Représentation du repère galiléen d'origine O contenant les deux corps P_0 et P_1 en interaction gravitationnelle.

rapport à l'origine O sont

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_0}}{dt^2} &= -G \frac{m_0 m_1 \overrightarrow{P_1 P_0}}{\|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^3} \\ m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_1}}{dt^2} &= -G \frac{m_0 m_1 \overrightarrow{P_0 P_1}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^3} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où G représente la constante gravitationnelle universelle mesurée en mètre au cube par kilogramme et par seconde au carré dans le système international d'unités. Le membre de droite de ces équations représente les forces gravitationnelles agissant sur chacun des deux corps.

La solution de ces équations est trouvée en résolvant deux équations différentielles du second ordre vectorielles. Dès lors, pour connaître le mouvement des deux corps en interaction gravitationnelle, nous devons résoudre six équations différentielles du second ordre scalaires.

2.2 Le mouvement relatif

Nous allons à présent réduire le nombre d'équations décrivant le problème des deux corps à une équation différentielle du second ordre vectorielle. Étant donné que nous étudions ce problème dans un système isolé, aucune force extérieure au système n'agit sur lui. De plus, la somme des interactions gravitationnelles des deux corps composant le système s'annule. Dès lors, la résultante des forces agissant sur le centre de masse de ce système est nulle. Ce centre de masse, noté C , est défini comme

$$(m_0 + m_1) \overrightarrow{OC} = m_0 \overrightarrow{OP_0} + m_1 \overrightarrow{OP_1}. \quad (2.2)$$

En utilisant les expressions des forces gravitationnelles des deux corps déterminées dans le

membre de droite de (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(m_0 + m_1) \frac{d^2 \overrightarrow{OC}}{dt^2} &= m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_0}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_1}}{dt^2} \\
&= -G \frac{m_0 m_1 \overrightarrow{P_1 P_0}}{\|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^3} + G \frac{m_0 m_1 \overrightarrow{P_1 P_0}}{\|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^3} \\
&= \vec{0}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous en déduisons que l'accélération de ce centre de masse est nulle. De ce fait, le mouvement du centre de masse du système des deux corps P_0 et P_1 est rectiligne. En translatant l'origine de notre repère galiléen sur ce centre de masse, le repère reste galiléen. Nous pouvons alors décrire le mouvement des deux corps en interaction gravitationnelle par rapport au centre de masse de ce système.

Tout d'abord, nous appliquons la relation de Chasles dans la première égalité de (2.3) et nous obtenons, en utilisant le fait que le centre de masse possède une accélération nulle,

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= m_0 \frac{d^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_0})}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_1})}{dt^2} \\
&= m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} \\
&\Leftrightarrow m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} = -m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons constater que la connaissance du mouvement du corps P_0 autour du centre de masse nous permet de connaître celui du corps P_1 et inversement. De plus, la connaissance du vecteur allant du centre de masse au corps P_0 nous permet de connaître celui allant du centre de masse au corps P_1 . En effet, en appliquant la relation de Chasles dans l'égalité (2.2), nous obtenons

$$\overrightarrow{CP_1} = -\frac{m_0}{m_1} \overrightarrow{CP_0}. \tag{2.4}$$

Nous nous limiterons dès lors à la résolution d'une seule équation différentielle du second ordre vectorielle pour connaître les mouvements des deux corps du problème des deux corps.

Ensuite, nous utilisons la relation de Chasles afin de montrer que le mouvement du corps P_0 par rapport au centre de masse est similaire au mouvement du corps P_0 par rapport à O .

$$\begin{aligned}
m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_0}}{dt^2} &= m_0 \frac{d^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_0})}{dt^2} \\
&= m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2}.
\end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue grâce au fait que l'accélération du centre de masse est nulle. De plus, en utilisant la relation (2.4), nous pouvons écrire le vecteur $\overrightarrow{P_1 P_0}$ comme

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1 P_0} &= \overrightarrow{P_1 C} + \overrightarrow{CP_0} \\
&= \frac{m_0 + m_1}{m_1} \overrightarrow{CP_0}.
\end{aligned}$$

Enfin, nous utilisons l'ensemble de ces informations pour obtenir le mouvement du corps P_0 par rapport au centre de masse du système. Celui-ci est

$$\begin{aligned}
m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2} &= -G \frac{m_0 m_1 \overrightarrow{P_1 P_0}}{\|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^3} \\
&= -G \frac{m_0 m_1^4 (m_0 + m_1) \overrightarrow{CP_0}}{m_1 (m_0 + m_1)^3 \|\overrightarrow{CP_0}\|^3} \\
&= -G \frac{m_0 m_1^3 \overrightarrow{CP_0}}{(m_0 + m_1)^2 \|\overrightarrow{CP_0}\|^3} \\
\Leftrightarrow \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2} &= -G \frac{m_1^3 \overrightarrow{CP_0}}{(m_0 + m_1)^2 \|\overrightarrow{CP_0}\|^3}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons le mouvement du corps P_1 par rapport au centre de masse. Celui-ci est

$$\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} &= -m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2} \\
&= G \frac{m_0 m_1^3 \overrightarrow{CP_0}}{(m_0 + m_1)^2 \|\overrightarrow{CP_0}\|^3} \\
\Leftrightarrow \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} &= G \frac{m_0 m_1^2 \overrightarrow{CP_0}}{(m_0 + m_1)^2 \|\overrightarrow{CP_0}\|^3}.
\end{aligned}$$

Cependant, lorsque nous sommes dans un problème des deux corps où un des deux corps est plus massif que l'autre, le centre de masse du système peut être confondu avec ce corps. En effet, ce dernier effectue de très petits mouvements autour du centre de masse du système alors que l'autre corps fait des mouvements plus larges. Il est donc plus intéressant de décrire le mouvement de celui-ci par rapport à l'autre corps, confondu avec le centre de masse. Dans la suite, nous étudions le mouvement du corps P_1 par rapport au corps P_0 , pris comme étant le corps massif. Celui-ci peut alors être vu comme une origine attirant le deuxième corps, P_1 .

L'équation vectorielle du mouvement de ce corps P_1 par rapport au corps P_0 est établie sur base des équations du mouvement des deux corps par rapport à l'origine O données en (2.1). Tout d'abord, nous utilisons la relation de Chasles sur celles-ci afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \overrightarrow{P_0 P_1}}{dt^2} &= \frac{d^2 (\overrightarrow{P_0 O} + \overrightarrow{OP_1})}{dt^2} \\
&= G \frac{m_1 \overrightarrow{P_1 P_0}}{\|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^3} - G \frac{m_0 \overrightarrow{P_0 P_1}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^3} \\
&= -G \frac{m_1 \overrightarrow{P_0 P_1}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^3} - G \frac{m_0 \overrightarrow{P_0 P_1}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^3} \\
&= -G \frac{(m_0 + m_1) \overrightarrow{P_0 P_1}}{\|\overrightarrow{P_0 P_1}\|^3}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en posant $\vec{s} = \overrightarrow{P_0 P_1}$ et $\mu = G(m_0 + m_1)$, le mouvement du corps P_1 par rapport au corps P_0 est

$$\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{s}}{s^3} \quad (2.5)$$

où s représente la norme du vecteur \vec{s} , et où μ est appelé le paramètre du mouvement.

Dès à présent, nous traitons le problème des deux corps comme étant la détermination du mouvement de l'un des deux corps par rapport à l'autre, considéré comme une origine attractive. De ce fait, le mouvement de ce corps est déterminé par l'équation (2.5) et est appelé le mouvement keplerien.

2.3 Les intégrales premières du mouvement

Afin de déterminer l'expression du mouvement keplerien, nous introduisons les intégrales premières du mouvement. En effet, celles-ci aideront à résoudre l'équation (2.5). Nous définissons une intégrale première comme étant une quantité, propre au mouvement, invariable au cours du temps. Dans notre cas, nous en déterminons deux.

La première intégrale est celle du moment cinétique du problème des deux corps. En effet, nous pouvons vérifier si celui-ci est bien conservé. Nous calculons sa dérivée et nous regardons si elle vaut zéro. La dérivée du vecteur moment cinétique est

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\vec{s} \times \frac{d\vec{s}}{dt} \right) \\ &= \left[\frac{d\vec{s}}{dt} \times \frac{d\vec{s}}{dt} \right] + \left[\vec{s} \times \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \right] \\ &= \left[\vec{s} \times \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \right]. \end{aligned}$$

Or, le vecteur position \vec{s} et celui de l'accélération sont coplanaires. En effet, en regardant l'équation (2.5), nous remarquons que le vecteur de l'accélération est dirigé dans le sens opposé à celui de la position. Dès lors, la dérivée du vecteur moment cinétique est nulle et celui-ci est conservé.

Par ailleurs, nous savons que le vecteur moment cinétique du problème est perpendiculaire à celui de la position et de la vitesse du corps P_1 . Il est donc orthogonal au plan contenant ces deux derniers vecteurs. Or, ce dernier plan contient également le mouvement du corps. Le vecteur moment cinétique représente donc le vecteur normal au plan reprenant le mouvement du corps. De plus, étant donné que le moment cinétique est conservé, il garde la même direction en tout temps. Nous en déduisons alors que le plan du mouvement du corps reste inchangé au cours du temps. Dans le référentiel \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 représenté à la FIGURE 2.2, nous le désignons grâce aux axes \vec{p}_1 et \vec{p}_2 .

Il est également possible de déterminer l'expression du vecteur moment cinétique. Tout d'abord, dans le référentiel \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 , les coordonnées cartésiennes du vecteur position du corps sont

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

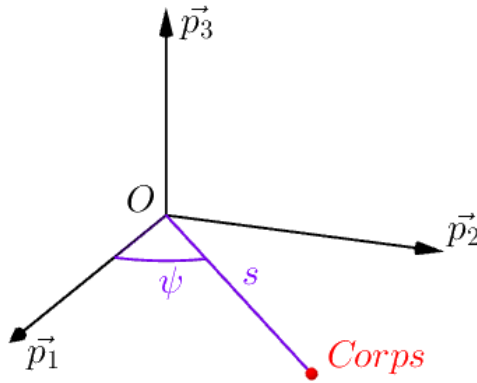


FIGURE 2.2 – Représentation du plan du mouvement du corps grâce aux deux premiers axes du repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 . Les coordonnées polaires du corps sont également représentées.

En notant l'angle entre le premier axe de ce repère et le vecteur position du corps ψ , conformément à la FIGURE 2.2, les coordonnées polaires de ce vecteur sont

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s \cos \psi \\ s \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, à l'aide de ces dernières coordonnées, nous établissons l'expression du vecteur vitesse du corps en mouvement en dérivant sa position au cours du temps.

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cos \psi - s \sin \psi \dot{\psi} \\ \dot{s} \sin \psi + s \cos \psi \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en utilisant les coordonnées polaires des vecteurs position et vitesse, nous sommes en mesure de déterminer l'expression du vecteur moment cinétique du système.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \vec{s} \times \frac{d\vec{s}}{dt} \\ &= \begin{vmatrix} s \cos \psi & s \sin \psi & 0 \\ \dot{s} \cos \psi - s \sin \psi \dot{\psi} & \dot{s} \sin \psi + s \cos \psi \dot{\psi} & 0 \\ \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \cos \psi (\dot{s} \sin \psi + s \cos \psi \dot{\psi}) - s \sin \psi (\dot{s} \cos \psi - s \sin \psi \dot{\psi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s^2 \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous constatons dans un premier temps que le vecteur moment cinétique est bien perpendiculaire au plan du mouvement car il est dirigé le long du troisième axe de notre référentiel. Ensuite, étant donné que le moment cinétique est une intégrale première du mouvement, la quantité $s^2 \dot{\psi}$ est constante. Cette quantité est appelée la constante d'aire et nous la notons A . Dès à présent,

nous travaillons directement dans le plan du mouvement du corps, représenté par le repère $\vec{p}_1\text{-}\vec{p}_2$.

La deuxième intégrale première est celle de l'énergie. En effet, dans notre système composé de deux corps, nous ne retrouvons que des forces conservatives dans les membres de droite de l'équation (2.1). Par conséquent, l'énergie totale du système est également conservée au cours du temps. Celle-ci s'exprime d'ailleurs comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système.

Pour déterminer l'expression de l'énergie cinétique, nous utilisons les coordonnées polaires du vecteur vitesse du corps. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left\| \frac{d\vec{s}}{dt} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[(\dot{s} \cos \psi - s \sin \psi \dot{\psi})^2 + (\dot{s} \sin \psi + s \cos \psi \dot{\psi})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\psi}^2). \end{aligned}$$

Nous exprimons ensuite l'énergie potentielle du système à l'aide de ces forces conservatives. Puisqu'elles sont conservatives, leur résultante dérive du potentiel gravitationnel du système. Dans notre cas, l'expression de la force résultante F_R est celle du membre de droite de l'équation (2.5). En utilisant les coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{s} , nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= -\vec{\nabla} E_p \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-\mu}{(\sqrt{s_x^2 + s_y^2})^3} s_x \\ \frac{-\mu}{(\sqrt{s_x^2 + s_y^2})^3} s_y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E_p &= \frac{-\mu}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \\ &= \frac{-\mu}{s}. \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie totale du système est alors, pour les coordonnées polaires du corps,

$$E_t = \frac{1}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\psi}^2) - \frac{\mu}{s}. \quad (2.7)$$

En utilisant le changement de variables qui suit pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} s_x &= s \cos \psi \\ s_y &= s \sin \psi, \end{aligned}$$

nous pouvons exprimer l'énergie totale du système grâce aux coordonnées cartésiennes du corps. Celle-ci devient alors

$$E_t = \frac{1}{2} \dot{s}^2 - \frac{\mu}{s} \quad (2.8)$$

où \dot{s} représente la dérivée au cours du temps de la norme du vecteur (2.6).

2.4 Le mouvement keplerien du corps

Il est à présent possible de déterminer l'expression du mouvement keplerien du corps à l'aide des deux intégrales premières détaillées précédemment. Nous partons de l'expression de l'intégrale première de l'énergie donnée en (2.7). Nous utilisons également l'expression de la constante d'aire A , $s^2\dot{\psi}$, et nous effectuons un changement de variables.

Ce changement de variables consiste à prendre la variable ψ comme nouvelle variable indépendante, remplaçant t . Pour remplacer la variable dépendante s , nous prenons la variable u définie comme

$$u(\psi) = \frac{1}{s(t)}.$$

Suite à ce changement de variables, l'énergie totale du système devient

$$E_t = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 + \frac{1}{u^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] - \mu u.$$

Avant de poursuivre, nous développons la dérivée de l'inverse de u . Pour cela, nous utilisons l'expression de la constante d'aire en fonction des nouvelles variables,

$$\begin{aligned} A &= s^2 \dot{\psi} \\ &= \frac{1}{u^2} \frac{d\psi}{dt}, \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) &= \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \\ &= -A \frac{du}{d\psi}. \end{aligned}$$

En remplaçant cette nouvelle expression de la dérivée de l'inverse de u dans celle de l'énergie, cette dernière devient

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} \left[A^2 \left(\frac{du}{d\psi} \right)^2 + A^2 u^2 \right] - \mu u \\ &= \frac{1}{2} A^2 \left[\left(\frac{du}{d\psi} \right)^2 + u^2 \right] - \mu u. \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent en déduire l'équation à résoudre pour trouver l'expression du mouvement keplerien du corps en isolant le carré de la dérivée de la variable u par rapport à la variable indépendante ψ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\psi} \right)^2 &= \frac{2}{A^2} (E_t + \mu u) - u^2 \\ \Leftrightarrow \quad \pm d\psi &= \frac{du}{\sqrt{\frac{2}{A^2} (E_t + \mu u) - u^2}}. \end{aligned}$$

Or, nous pouvons développer l'expression sous la racine pour la simplifier. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\frac{2}{A^2}(E_t + \mu u) - u^2 &= \frac{2E_t}{A^2} + \frac{2\mu u}{A^2} - u^2 \\ &= \frac{2E_t}{A^2} - \left(u - \frac{\mu}{A^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{A^4}.\end{aligned}$$

Ensuite, en posant $k = \sqrt{\frac{2E_t}{A^2} + \frac{\mu^2}{A^4}}$, la racine du dénominateur de notre équation à résoudre se simplifie et cette équation devient

$$\frac{du}{\sqrt{k^2 - \left(u - \frac{\mu}{A^2}\right)^2}} = \pm d\psi.$$

Nous introduisons une troisième variable $z = u - \frac{\mu}{A^2}$ afin de simplifier le calcul. Sa dérivée équivaut à celle de la variable u et l'expression à résoudre devient

$$\frac{dz}{\sqrt{k^2 - z^2}} = \pm d\psi.$$

Enfin, nous allons résoudre cette équation. Nous intégrons les deux membres de l'égalité. En remarquant que le membre de gauche représente la dérivée de la fonction arc cosinus dont l'argument est $\frac{z}{k}$, nous obtenons la solution

$$z = k \cos(\psi - \omega)$$

où ω désigne la constante d'intégration. Dès à présent, nous notons $f = \psi - \omega$. La solution de l'intégration est alors

$$z = k \cos f.$$

En inversant les changements de variables effectués au travers de la résolution de notre équation différentielle représentant le mouvement du corps, nous obtenons l'expression de la solution de ce mouvement.

$$\begin{aligned}z &= k \cos f \\ \Rightarrow u &= \frac{\mu}{A^2} + k \cos f \\ \Rightarrow s(f) &= \frac{1}{\frac{\mu}{A^2} + k \cos f} \\ &= \frac{\frac{A^2}{\mu}}{1 + k \frac{A^2}{\mu} \cos f}.\end{aligned}$$

Dans le membre de droite de cette égalité, la seule variable dépendant du temps est f . De ce fait, nous exprimons la variable s en fonction de la variable f , et non plus en fonction du temps. De plus, nous remarquons que cette expression représente l'équation polaire d'une conique.

Par conséquent, de manière générale, le mouvement keplerien du corps autour d'une origine attractive s'effectue sur une orbite représentée par une conique non dégénérée. Cette origine représente le foyer de la conique et son équation est

$$s(f) = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (2.9)$$

où $p = \frac{A^2}{\mu}$ représente le paramètre focal et $e = k \frac{A^2}{\mu}$ est l'excentricité de cette conique. Ces deux paramètres sont des constantes.

Il existe trois types de coniques non dégénérées : la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Parmi ces trois types de conique, celle de l'orbite du corps en mouvement est déterminée grâce à la valeur de son excentricité e . Or, l'expression de cette constante e est

$$\begin{aligned} e &= \frac{kA^2}{\mu} \\ &= \frac{A^2}{\mu} \sqrt{\frac{2E_t}{A^2} + \frac{\mu^2}{A^4}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2E_tA^2}{\mu^2}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans cette expression, nous remarquons que, selon le signe de l'énergie totale du système, la valeur de l'excentricité équivaut, excède ou est plus petite que la valeur de 1. Cette position de la valeur de e par rapport à 1 nous indique le type de conique décrivant l'orbite du corps. La TABLE 2.1 reprend alors les trois cas possibles d'orbites pour le corps en fonction du signe de l'énergie et, par conséquent, de la valeur de l'excentricité. Nous étudierons les orbites elliptique et hyperbolique mais nous n'étudierons pas celle représentée par la parabole, simple frontière entre ces deux premières coniques.

$E_t > 0$	$\Rightarrow e > 1$	l'orbite est représentée par une branche d'hyperbole.
$E_t = 0$	$\Rightarrow e = 1$	l'orbite est représentée par une parabole.
$-1 < E_t < 0$	$\Rightarrow e < 1$	l'orbite est représentée par une ellipse.

TABLE 2.1 – *Tableau reprenant les différents types de coniques représentant l'orbite du corps en fonction de la valeur de l'excentricité et de la valeur de l'énergie totale du système.*

2.5 L'orbite elliptique du corps

Nous commençons par présenter l'orbite elliptique comme orbite possible pour le corps en mouvement. Celle-ci possède une forme d'ellipse et se situe dans le plan du mouvement muni du repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . Une ellipse, comme toute conique, possède deux foyers et une origine. Cette origine

est le centre de symétrie de l'ellipse. Nous repérons également deux axes de symétries. Ceux-ci sont les droites horizontale et verticale passant par l'origine de la conique. Nous noterons que dans un problème des deux corps, le corps représentant l'origine attractive occupe un des deux foyers de l'ellipse. L'autre corps se déplace sur l'ellipse elle-même.

Ensuite, nous pouvons détailler les grandeurs caractéristiques de l'ellipse. La première désigne la distance horizontale entre l'origine et l'ellipse. Nous la nommons le demi-grand axe noté a . La deuxième représente la distance verticale entre l'origine et l'ellipse et se nomme le demi-petit axe. Nous la désignons par b . L'excentricité e , ainsi que le paramètre focal p , font partie des grandeurs caractéristiques de l'ellipse. De plus, ce dernier symbolise la distance verticale entre un des deux foyers de l'ellipse et elle-même. Ces grandeurs caractéristiques, représentées à la FIGURE 2.3 dans le repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 , peuvent être liées les unes aux autres grâce aux relations suivantes.

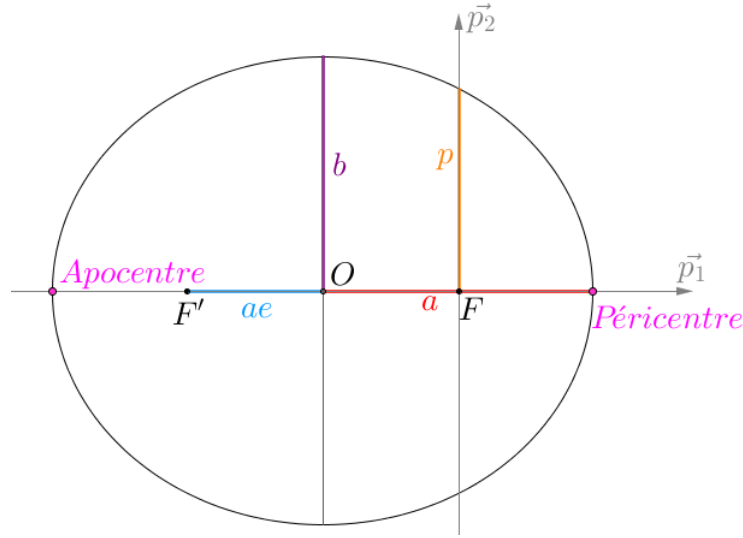


FIGURE 2.3 – Représentation de l'ellipse et des grandeurs caractéristiques dans le repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . L'origine et les foyers de l'ellipse sont représentés respectivement par O , F et F' . Les grandeurs caractéristiques sont représentées par a , b , e et p . Le péricentre et l'apocentre sont également représentés. Le foyer occupé est F .

$$\begin{aligned}
 b &= a\sqrt{1-e^2} \\
 e &= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \\
 ae &= \sqrt{a^2-b^2} \\
 p &= \frac{b^2}{a} = a(1-e^2).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Enfin, nous définissons deux derniers éléments sur l'ellipse : le péricentre et l'apocentre. Le premier désigne le point sur l'ellipse le plus proche du foyer occupé. L'apocentre, à l'opposé, est le point sur l'ellipse le plus éloigné de celui-ci. Ces deux éléments sont représentés à la FIGURE 2.3 où le foyer occupé est F . Nous remarquons que notre choix de repère nous permet de placer

le péricentre et l'apocentre sur son axe horizontal. Nous notons également que lorsque le corps occupant le foyer de l'ellipse est le Soleil, le point de l'ellipse le plus proche de celui-ci est appelé le périhélie et le point le plus éloigné se nomme l'aphélie.

À présent, nous exprimons l'intégrale première de l'énergie du mouvement elliptique du corps à l'aide des grandeurs caractéristiques de cette conique. Nous utilisons l'expression de la position du corps donnée en (2.9) dans le repère $\vec{p}_1\text{-}\vec{p}_2$ et la relation entre l'excentricité et l'énergie totale du système donnée en (2.10).

Premièrement, nous regardons l'endroit où l'expression de cette position du corps, dépendant de la variable $f = \psi - \omega$, est la plus simple. Or, la variable f représente, dans le repère $\vec{p}_1\text{-}\vec{p}_2$, l'angle entre le première axe, \vec{p}_1 , et le segment joignant la position du corps à l'origine du repère, c'est-à-dire au foyer occupé de l'ellipse. Nous la nommons également l'anomalie vraie du corps. Lorsque le corps se situe au péricentre de son orbite, son anomalie vraie vaut 0° alors que lorsqu'il se trouve à l'apocentre de son orbite, elle prend la valeur de 180° . Nous remarquons dès lors que l'expression de la position du corps, donnée par (2.9), est simplifiée en ces deux endroits. En effet, elle vaut

$$\begin{aligned} s_P &= \frac{p}{1+e} \\ s_A &= \frac{p}{1-e} \end{aligned}$$

où s_P et s_A représentent la distance du corps au foyer F lorsque celui-ci se situe respectivement au péricentre et à l'apocentre de l'ellipse.

Deuxièmement, en observant la FIGURE 2.3, nous remarquons que la somme de ces deux positions vaut le double du demi-grand axe de l'ellipse. Dès lors,

$$\begin{aligned} 2a &= s_P + s_A \\ &= \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \\ \Rightarrow a &= \frac{p}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Nous devons à présent faire apparaître l'expression de l'énergie totale du système. Nous utilisons alors la relation (2.10) permettant d'exprimer l'excentricité en fonction de l'énergie totale du système, et l'expression $p = \frac{A^2}{\mu}$ liant le paramètre focal et la constante d'aire. Nous obtenons

$$\begin{aligned} a &= \frac{\frac{A^2}{\mu}}{1 - \left(1 + \frac{2E_t A^2}{\mu^2}\right)} \\ &= \frac{1}{-\frac{2E_t}{\mu}} \\ &= -\frac{\mu}{2E_t}. \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie totale du système en fonction des grandeurs caractéristiques de l'ellipse est alors

$$E_t = -\frac{\mu}{2a}.$$

Cette énergie est bien négative, conformément à la TABLE 2.1.

Ensuite, nous déterminons l'expression de la constante d'aire en fonction des grandeurs caractéristiques de l'ellipse. Celle-ci est liée au paramètre focal de l'ellipse par la relation

$$p = \frac{A^2}{\mu}.$$

Or, par les relations entre les différentes grandeurs caractéristiques, données en (2.11), nous pouvons utiliser celle liant p aux deux grandeurs a et e afin d'obtenir

$$A = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (2.12)$$

Ce remplacement, nous pouvons également l'effectuer dans l'expression de la position du corps (2.9). Dans le cas de l'ellipse, nous avons donc une position donnée par

$$s(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.13)$$

En exprimant l'ensemble de ces éléments en fonction des grandeurs caractéristiques de l'ellipse, nous avons mis en évidence l'anomalie vraie et son rôle dans la détermination de la position du corps. Nous allons à présent introduire deux autres anomalies du corps : l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne. L'anomalie excentrique représente l'angle entre le premier axe du repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 et le segment joignant l'origine de l'ellipse et la position du corps si celui-ci était sur une orbite circulaire de rayon a . Celle-ci est représentée à la FIGURE 2.4.

Nous allons alors tenter de trouver la relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique. Dans un premier temps, en regardant la FIGURE 2.4, nous pouvons considérer l'ellipse comme étant le résultat d'une compression verticale du cercle de rayon a . Celle-ci se fait selon le rapport $\frac{b}{a}$. En effet, en observant la conséquence de cette transformation sur le rayon vertical de longueur a se situant au dessus de l'origine, nous constatons que sa longueur devient b .

Dans un deuxième temps, nous utilisons les relations (2.11) entre les grandeurs caractéristiques de l'ellipse, le rapport de compression verticale et les annotations de la FIGURE 2.4 pour établir les relations liant les deux anomalies du corps.

$$s \cos f = a \cos E - ae \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} s \sin f &= \frac{b}{a} a \sin E \\ &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous sommes également en mesure de déterminer l'expression de s en fonction de l'anomalie

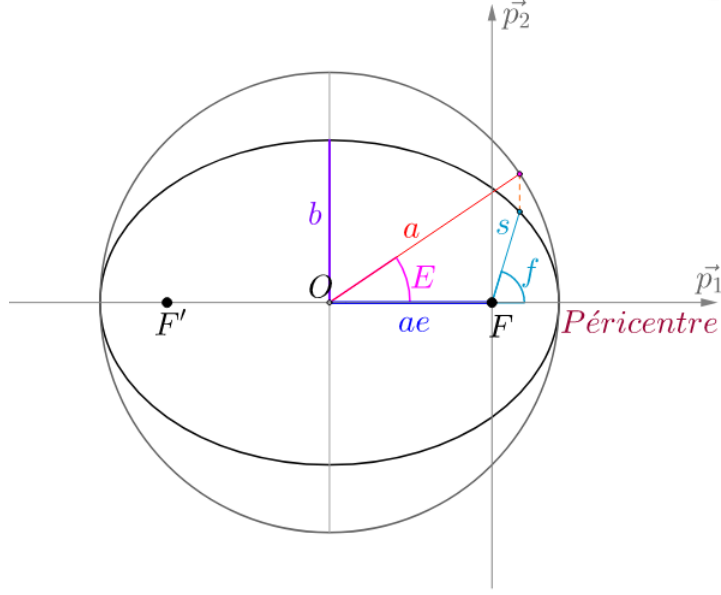


FIGURE 2.4 – Représentation de l'anomalie excentrique et de l'anomalie vraie du corps dans le repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . Pour lier ces deux anomalies, nous représentons également les grandeurs caractéristiques de l'ellipse a , b et ae , ainsi que la position s .

excentrique. En détaillant le carré de cette position,

$$\begin{aligned}
 s^2 &= s^2 \cos^2 f + s^2 \sin^2 f \\
 &= a^2 (\cos E - e)^2 + a^2 (1 - e^2) \sin^2 E \\
 &= a^2 + a^2 e^2 - 2a^2 e \cos E - a^2 e^2 \sin^2 E \\
 &= a^2 (1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E) \\
 &= a^2 (1 - e \cos E)^2,
 \end{aligned}$$

l'expression de la position s en fonction de l'anomalie E est

$$s = a(1 - e \cos E). \quad (2.16)$$

La troisième anomalie du corps est l'anomalie moyenne. Afin de déterminer son expression, nous allons établir l'équation de Kepler. Nous dérivons les deux expressions de la position s du corps, (2.13) et (2.16), en fonction du temps et nous comparons les résultats. La dérivée de l'expression (2.16) est

$$\dot{s} = ae \sin E \dot{E}.$$

Pour obtenir la dérivée de l'expression de (2.13), nous utilisons la dérivée de l'anomalie vraie et la constante d'aire

$$\begin{aligned}
 A &= s^2 \dot{\psi} \\
 &= \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 + e \cos f)^2} \dot{\psi}.
 \end{aligned}$$

L'anomalie vraie étant définie par $f = \psi - \omega$ où ω est une constante, sa dérivée est identique à celle de la coordonnée polaire ψ .

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)^2} e \sin f \dot{f} \\ &= \frac{A}{a(1-e^2)} e \sin f.\end{aligned}$$

En égalant les deux expressions de la dérivée de s , nous obtenons

$$\dot{E} = \frac{A}{a^2(1-e^2)} \frac{\sin f}{\sin E}.$$

En utilisant la relation (2.12) liant la constante d'aire aux grandeurs caractéristiques, et la relation (2.15) exprimant le quotient entre le sinus des anomalies selon ces grandeurs,

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{s} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{a(1-e\cos E)} \\ \Leftrightarrow (1-e\cos E)\dot{E} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.\end{aligned}$$

Nous pouvons intégrer cette dernière équation sur un intervalle de temps $[\tau \ t]$. Le temps τ symbolise le temps auquel le corps passe au péricentre de son orbite. Cette intégrale nous donne alors l'équation de Kepler.

$$E - e \sin E = n(t - \tau) = M \quad (2.17)$$

où $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Celui-ci représente le moyen mouvement et M est l'anomalie moyenne du corps. De plus, si nous considérons que ce dernier fait un tour complet sur son orbite en un temps noté T , nous pouvons définir la période, représentée par ce T comme

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{n} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}},\end{aligned}$$

et nous retrouvons la troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}.$$

Nous terminons cette étude de l'orbite elliptique en présentant six éléments permettant de décrire la position de l'orbite elliptique dans l'espace, ainsi que le mouvement du corps sur cette orbite. Tout d'abord, nous avons déterminé les grandeurs caractéristiques de l'ellipse. Celles-ci permettent de décrire sa forme. Or, nous remarquons, dans les relations (2.11) entre ces grandeurs caractéristiques, que la connaissance des grandeurs a et e nous suffit pour déterminer les autres grandeurs caractéristiques. Ensuite, une fois la forme de l'ellipse connue, le petit corps est

repéré sur celle-ci grâce à l'une de ses anomalies. Nous choisissons l'anomalie vraie.

Nous possédons donc déjà trois éléments, a , e et f , nous permettant de connaître le mouvement keplerien du petit corps dans le repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . Malheureusement, nous ne pourrions pas toujours nous munir directement d'un référentiel dont le plan formé des deux premiers axes contient le plan du mouvement du corps. Les trois derniers éléments serviront alors à repérer le plan du mouvement elliptique dans un référentiel quelconque.

Dans ce référentiel quelconque, le plan formé des deux premiers axes est appelé le plan de référence. Celui-ci possède une droite d'intersection avec le plan du mouvement elliptique. Cette droite d'intersection est appelée la ligne des nœuds et indique la direction du vecteur du nœud ascendant. Pour déterminer le sens de ce vecteur, qui est celui du nœud ascendant, nous nous imaginons sur l'origine du référentiel quelconque. Sur cette origine, nous regardons sur la gauche de la ligne des nœuds. Si le plan du mouvement est au dessus du plan de référence, alors nous regardons dans le sens du nœud ascendant. En revanche, si le plan du mouvement elliptique se situe sous le plan de référence, nous regardons dans le sens du nœud descendant.

Ainsi, le premier des trois éléments recherchés est l'angle entre le plan de référence et celui de l'ellipse en regardant, depuis l'origine, dans le sens du vecteur du nœud ascendant. Nous l'appelons l'inclinaison et le notons i . L'élément suivant désigne l'angle entre le premier axe du repère quelconque et le vecteur du nœud ascendant. Il est nommé la longitude du nœud ascendant et est noté Ω . Le dernier élément, nommé l'argument du péricentre, représente l'angle entre le vecteur du nœud ascendant et le péricentre de l'ellipse. Nous le désignons par la lettre ω . Une représentation de ces trois éléments, constants au cours du temps, ainsi que de l'anomalie vraie, variant au cours du temps, est faite à la FIGURE 2.5. Nous noterons que, lorsque le repère quelconque est centré sur le Soleil, il est appelé repère héliocentrique. Dans celui-ci, nous utilisons davantage le nom d'argument du périhélie pour désigner ω .

Nous pouvons utiliser, dès à présent, ces six éléments, a , e , i , Ω , ω et f pour repérer un corps sur son orbite elliptique dans un référentiel quelconque. En dynamique céleste, ces six éléments sont souvent appelés les éléments orbitaux du corps.

2.6 L'orbite hyperbolique du corps

Nous clôturons ce chapitre par la présentation de l'orbite hyperbolique pour le mouvement du corps. Nous nous limiterons cependant à la description de cette orbite et à la simplification de l'expression de l'énergie et de la position du corps.

Comme dans le cas de l'orbite elliptique, le plan du mouvement du corps se situe dans un plan muni du repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . Cependant, dans ce cas-ci, le mouvement du corps se déroule sur une des deux branches de l'hyperbole. En effet, étant une conique, elle possède aussi deux foyers et une origine qui est son centre de symétrie. Toutefois, elle possède également deux branches passant chacune entre l'origine de l'hyperbole et leur foyer correspondant. Dès lors, le corps ne peut se déplacer que sur une des deux branches de l'hyperbole et, contrairement à l'ellipse, ne repasse jamais au même endroit. Il continue son déplacement vers l'infini. L'hyperbole possède également deux asymptotes passant par son origine. Celles-ci sont prises chacune en un point à l'infini sur les deux branches de l'hyperbole.

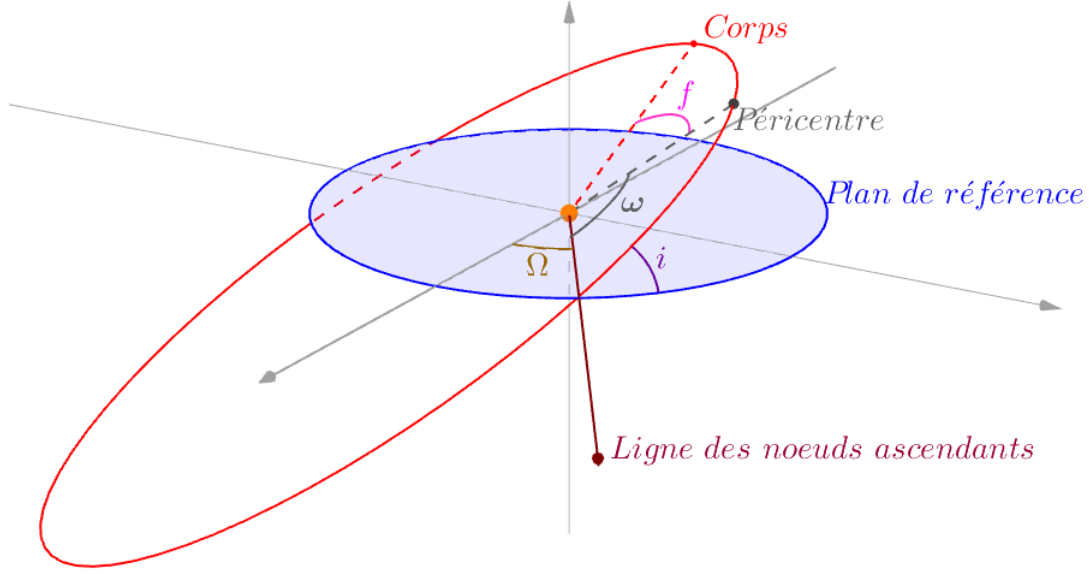


FIGURE 2.5 – Représentation des trois éléments, i , Ω et ω , permettant de situer le plan du mouvement du corps dans un repère quelconque ainsi que l'anomalie vraie f du corps. Nous désignons également le plan de référence, la ligne des noeuds ascendants et le péricentre du corps.

Nous présentons également les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole. Nous y retrouvons les grandeurs du demi-grand axe, de l'excentricité et du paramètre focal, définies de manière équivalente aux grandeurs caractéristiques trouvées dans le cas de l'ellipse. En revanche, le demi-petit axe représente, dans ce cas, la distance verticale entre l'intersection de l'hyperbole avec l'axe horizontal du repère et l'asymptote de l'hyperbole. Ces grandeurs sont représentées à la FIGURE 2.6 où F est le foyer occupé.

De plus, pour les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole, il existe des relations équivalentes à celles de l'ellipse. Celles-ci sont

$$\begin{aligned}
 b &= a\sqrt{e^2 - 1} \\
 e &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \\
 ae &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
 p &= \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Nous établissons à présent l'expression de l'énergie totale du système dans le cas d'un mouvement hyperbolique du corps. De manière similaire à ce qui a été fait dans le cas du mouvement elliptique, nous observons la FIGURE 2.6. Nous constatons alors que la somme entre la longueur a et la position du corps lorsque son anomalie vraie est nulle est identique à la longueur ae . En prenant l'expression de la position du corps, donnée en (2.9), pour une anomalie vraie nulle, nous

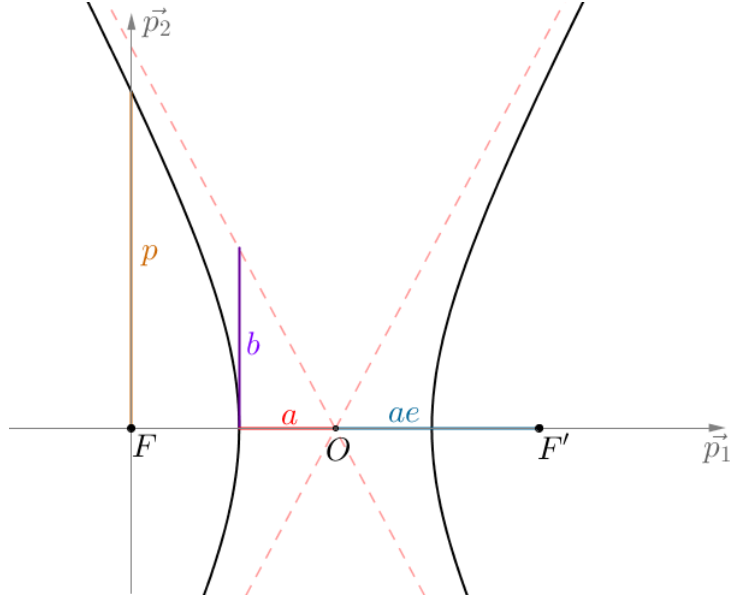


FIGURE 2.6 – Représentation de l'hyperbole et de ses différentes grandeurs caractéristiques dans le repère \vec{p}_1 - \vec{p}_2 . L'origine et les foyers de l'hyperbole sont représentés respectivement par O , F et F' . Les grandeurs caractéristiques sont représentées par a , b , e et p . Le foyer occupé est F .

obtenons

$$\begin{aligned} ae &= a + s(0) \\ \Leftrightarrow a(e - 1) &= \frac{p}{1 + e} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{-p}{(1 - e^2)}. \end{aligned}$$

En appliquant la même démarche que dans le cas d'une orbite elliptique, l'expression de l'énergie totale du système est

$$E_t = \frac{\mu}{2a}.$$

Comme présenté dans la TABLE 2.1, l'énergie du système est bien positive.

Enfin, nous simplifions l'expression de la position du corps (2.9) en utilisant les relations entre les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole, données en (2.18). Celle-ci devient

$$s(f) = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f}$$

où f désigne également l'anomalie vraie du corps. Elle est la seule à varier au cours du temps. Nous ne déterminerons pas d'autres éléments pour repérer le corps sur son orbite hyperbolique. En effet, ce type d'orbite est plutôt utilisé lors d'une étude locale d'un rapprochement entre deux corps. La détermination de la position du corps sur son orbite sera alors propre à cette étude locale.

Chapitre 3

Le problème des trois corps restreint circulaire

Nous nous intéressons à présent à un mouvement un peu plus compliqué que celui du problème des deux corps. En effet, ce mouvement est celui de trois corps en interaction gravitationnelle. Nous le nommons d'ailleurs le problème des trois corps. Dans ce chapitre, nous allons introduire brièvement ce problème, principalement sur base du chapitre 23 du cours de Mécanique céleste classique de Luc Duriez [5] et du cours de Dynamique céleste et résonances de Benoît Noyelles [15]. Nous commencerons par présenter le problème des trois corps. Ensuite, nous simplifierons les équations décrivant le mouvement de ces trois corps en considérant, dans la seconde partie, le centre de masse comme origine et, dans la troisième partie, le mouvement de deux corps par rapport au troisième. Nous expliquerons également, dans cette troisième partie, ce qu'est le problème des trois corps restreint circulaire sur base du problème des trois corps.

3.1 La présentation du problème

Nous commençons par déterminer les équations décrivant le mouvement d'un système isolé composé de trois corps en interaction gravitationnelle. Pour ce faire, nous utilisons principalement les mêmes notations que celles utilisées dans le cours de Mécanique céleste classique [5] de Luc Duriez. Tout d'abord, nous nous munissons d'un repère galiléen, comme celui représenté à la FIGURE 3.1. Sur celui-ci, l'origine du repère est notée O . Nous y retrouvons également trois corps en interaction gravitationnelle représentés par P_0, P_1 et P_2 . Ensuite, nous notons leurs masses, mesurées en kilogrammes, respectivement par m_0, m_1 et m_2 .

Dans ce repère, l'équation du mouvement de chaque corps par rapport à l'origine O est donnée, grâce aux lois d'interaction gravitationnelle de Newton, par

$$m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} = -Gm_k \sum_{i \neq k} m_i \frac{\overrightarrow{P_i P_k}}{\|P_i P_k\|^3} \quad \text{avec } k = 0, 1, 2 \quad (3.1)$$

où le membre de droite représente les forces d'attraction gravitationnelle agissant sur le corps P_k et la constante G est la constante gravitationnelle universelle mesurée en mètre au cube par kilogramme et par seconde au carré dans le système international d'unités.

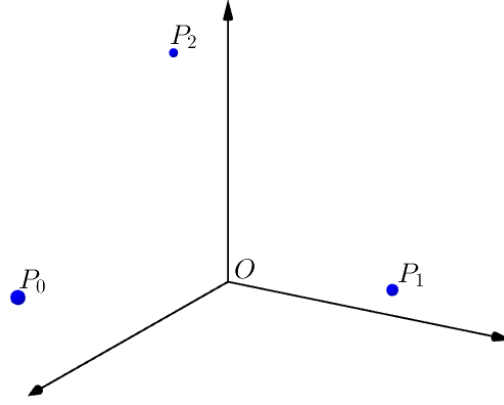


FIGURE 3.1 – Représentation du repère galiléen d'origine O ainsi que des trois corps P_0 , P_1 et P_2 en interaction gravitationnelle.

3.2 Le mouvement autour du centre de masse du système

Nous allons à présent pouvoir simplifier les équations décrivant notre problème des trois corps. En effet, étant dans un système isolé, la somme des interactions des corps les uns sur les autres est nulle et aucune autre force extérieure ne s'applique sur le système. Nous pouvons alors en déduire que la résultante des forces appliquée sur le centre de masse de ce système est nulle. En utilisant les membres de gauche des équations (3.1), nous obtenons

$$M \frac{d^2 \overrightarrow{OC}}{dt^2} = \sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} = 0 \quad (3.2)$$

où M est la masse totale du système isolé, mesurée en kilogrammes, et où C représente le centre de masse du système. Ce dernier possède donc un mouvement rectiligne uniforme. De plus, le repère dont l'origine est ce centre de masse est galiléen.

Dès lors, nous pouvons déterminer les équations du mouvement des trois corps par rapport au centre de masse du système. Nous appliquons la relation de Chasles dans la deuxième égalité de (3.2) afin de faire apparaître le centre de masse.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} \\ &= \sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_k})}{dt^2} \\ &= \sum_{k=0}^2 m_k \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OC}}{dt^2} + \frac{d^2 \overrightarrow{CP_k}}{dt^2} \right). \end{aligned}$$

Dans cette égalité, nous remarquons déjà la présence d'un terme traduisant l'accélération du centre de masse par rapport à l'origine. Cependant, le centre de masse se déplace à vitesse constante par rapport à l'origine O . Ce terme est donc nul. Nous remarquons également que la somme des accélérations des trois corps par rapport au centre de masse est nul. Nous pouvons dès lors exprimer l'accélération de l'un de ces trois corps par rapport au centre de masse en fonction des deux autres accélérations. En choisissant d'exprimer l'accélération du corps P_0 en fonction de

celles des deux autres corps, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 m_k \frac{d^2 \overrightarrow{CP_k}}{dt^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_0}}{dt^2} &= -m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_1}}{dt^2} - m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{CP_2}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous remarquons également, pour chaque corps, que son accélération par rapport à l'origine est identique à celle par rapport au centre de masse.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overrightarrow{OP_k}}{dt^2} &= \frac{d^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_k})}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 \overrightarrow{CP_k}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ensuite, nous pouvons déterminer les équations décrivant le mouvement de chacun des trois corps à l'aide de (3.1), de (3.3) et de (3.4). Afin d'obtenir des équations plus lisibles et en utilisant les mêmes simplifications d'écriture que Luc Duriez dans le chapitre 23 du cours [5], nous définissons, pour le nombre entier $k = 0, 1, 2$ et le nombre entier $i = 0, 1, 2$ différent de k , le vecteur

$$\begin{aligned} \vec{u}_k &= \overrightarrow{CP_k} \\ \Rightarrow \overrightarrow{P_i P_k} &= \overrightarrow{P_i C} + \overrightarrow{CP_k} \\ &= \overrightarrow{CP_k} - \overrightarrow{CP_i} \\ &= \vec{u}_k - \vec{u}_i. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous appliquons la relation (3.4) entre les accélérations des corps par rapport à l'origine et par rapport au centre de masse dans (3.1). Ensuite, dans cette même relation, nous utilisons le vecteur \vec{u}_k pour simplifier l'écriture des équations. Nous pouvons alors écrire les équations du mouvement de P_1 et de P_2 autour du centre de masse comme

$$\frac{d^2 \vec{u}_1}{dt^2} = -Gm_0 \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\|^3} - Gm_2 \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^3} \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 \vec{u}_2}{dt^2} = -Gm_0 \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_2 - \vec{u}_0\|^3} - Gm_1 \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{\|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\|^3}. \quad (3.6)$$

Nous en déduisons l'équation du mouvement du corps P_0 par rapport au centre de masse grâce à la relation (3.3) liant l'accélération de ce corps à celle des corps P_1 et P_2 .

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2} &= Gm_0 m_1 \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\|^3} + Gm_1 m_2 \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^3} + Gm_0 m_2 \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_2 - \vec{u}_0\|^3} + Gm_1 m_2 \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_1}{\|\vec{u}_2 - \vec{u}_1\|^3} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2} &= Gm_1 \frac{\vec{u}_1 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_1 - \vec{u}_0\|^3} + Gm_2 \frac{\vec{u}_2 - \vec{u}_0}{\|\vec{u}_2 - \vec{u}_0\|^3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3 Le mouvement de deux corps autour du troisième

Une autre manière d'étudier le mouvement des trois corps en interaction gravitationnelle dans un système isolé est de décrire le mouvement relatif de deux des trois corps par rapport au

troisième. Choisissons arbitrairement P_0 comme étant le corps de référence. Nous allons repartir des équations du mouvement des trois corps par rapport au centre de masse, (3.5), (3.6) et (3.7), pour en déduire les équations du mouvement des deux corps P_1 et P_2 par rapport à P_0 . En suivant également la simplification de notation proposée par Luc Duriez dans son chapitre 23 du cours [5], nous commençons par définir, pour le nombre entier $j = 0, 1, 2$, le vecteur

$$\begin{aligned}\vec{r}_j &= \overrightarrow{P_0 P_j} \\ &= -\overrightarrow{C P_0} + \overrightarrow{C P_j} \\ &= \vec{u}_j - \vec{u}_0.\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que lorsque le nombre entier j est nul, le vecteur \vec{r}_0 est nul. De plus, nous obtenons les relations suivantes, pour le nombre entier $k = 0, 1, 2$ et le nombre entier $i = 0, 1, 2$ différent de k ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{u}_j}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2}; \\ \vec{u}_i - \vec{u}_k &= \vec{r}_i + \vec{u}_0 - (\vec{r}_k + \vec{u}_0) \\ &= \vec{r}_i - \vec{r}_k.\end{aligned}$$

En utilisant ces relations, ainsi que les équations des accélérations des corps P_1 et P_0 par rapport au centre de masse, respectivement données par (3.5) et (3.7), nous obtenons l'équation du mouvement du corps P_1 par rapport au corps P_0 comme étant

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \frac{d^2 \vec{u}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2} \\ &= -Gm_0 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_0\|^3} \\ &= -Gm_0 \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|^3} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= -G(m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} + Gm_2 \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|^3} \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

De la même manière et en appliquant les équations des accélérations des corps P_2 et P_0 par rapport au centre de masse, respectivement données par (3.6) et (3.7), l'équation du mouvement du corps P_2 par rapport au corps P_0 est

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G(m_0 + m_2) \frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|^3} + Gm_1 \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} \right).\tag{3.9}$$

Dans les deux équations du mouvement de P_1 et de P_2 par rapport à P_0 , le premier terme des membres de droite est appelé le terme keplerien et le second est appelé le terme non keplerien.

De plus, lorsque nous étudions le mouvement héliocentrique¹ d'objets célestes possédant une masse beaucoup plus petite que celle du Soleil, nous considérons les termes non kepleriens comme des termes de perturbation. Selon L. Duriez dans le chapitre 23 du cours [5], il est toutefois nécessaire que la norme de la différence entre le vecteur \vec{r}_1 et le vecteur \vec{r}_2 soit du même ordre de

1. Le mouvement de corps s'effectue autour du Soleil, pris comme corps de référence.

grandeur que la norme du vecteur \vec{r}_1 et du vecteur \vec{r}_2 .

Enfin, lorsque nous parlons du problème des trois corps restreint, nous considérons qu'un des trois corps a une masse négligeable. Nous pouvons prendre, par exemple, le corps P_2 comme le corps de masse négligeable. Dès lors, ce corps n'influence pas le mouvement de l'autre corps P_1 . Nous pouvons donc négliger le terme non keplerien dans l'équation (3.8) du mouvement du corps P_1 . Son mouvement est appelé mouvement keplerien. De plus, le fait que le problème des trois restreint soit circulaire signifie que le deuxième corps, ici P_1 , se déplace autour du corps fixe sur une orbite circulaire. Les équations décrivant le mouvement de deux corps, P_1 et P_2 , par rapport à un troisième corps, P_0 , dans un problème des trois corps restreint circulaire sont alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= -G(m_0 + m_1)\frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} \\ \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= -G(m_0 + m_2)\frac{\vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|^3} + Gm_1\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3}\right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Dès à présent, lorsque nous étudions un problème des trois corps, nous nous plaçons dans le cas d'un problème des trois corps restreint circulaire. De plus, dans celui-ci, nous considérons un premier corps massif comme étant le corps de référence, un deuxième corps d'orbite circulaire et un troisième corps de masse négligeable. Le mouvement des deux derniers corps par rapport au corps massif est alors donné par l'équation (3.10).

Chapitre 4

La théorie d'Öpik

Dans ce chapitre, nous affinons notre connaissance de la dynamique du Système solaire en étudiant le rapprochement, sans collision, entre deux corps célestes orbitant autour d'un même troisième corps. En considérant qu'un des deux corps est plus massif que l'autre, nous déterminons analytiquement la nouvelle orbite du deuxième corps suite à son changement de trajectoire dû à l'attraction gravitationnelle du premier corps. Ce changement de trajectoire, que nous supposons instantané, sera étudié localement. L'ensemble de cette étude est basée sur l'article [1] de Carusi et al., ainsi que sur les articles de Valsecchi et al. de 1997 [18], de 2000 [19], de 2003 [20], de 2006 [16] et de 2015 [17], ce dernier étant pris comme article de référence. Nous commencerons par présenter le modèle analytique de cette théorie. Ensuite, dans la deuxième partie, nous introduirons les éléments permettant de comparer les positions des deux corps impliqués dans le rapprochement afin de déterminer, dans la troisième partie, une "sphère d'influence" permettant l'étude locale du changement de trajectoire du corps moins massif. Le quatrième point sera consacré à l'étude du mouvement de ce corps dans cette "sphère d'influence" avant son changement instantané de trajectoire. Le lieu de ce changement ainsi que ce changement seront étudiés respectivement dans la cinquième et sixième parties. Enfin, le dernier point nous permettra de déterminer la nouvelle orbite du corps moins massif suite à ce rapprochement.

4.1 Le modèle analytique du problème

L'étude du changement d'orbite d'un corps de masse négligeable résultant d'un rapprochement avec un deuxième corps plus massif se base sur le problème des trois corps restreint circulaire dont les équations de la dynamique sont données en (3.10). Dans ce problème, nous considérons trois corps : le corps massif, que nous appelons dès à présent le "Soleil" ; le deuxième corps, appelé "planète" dans la suite ; et le corps de masse négligeable, appelé dans la suite le "petit corps", sur base du terme utilisé par G.B. Valsecchi et al. notamment dans leur article [17]. La planète et le petit corps ont tous deux des orbites héliocentriques et sont amenés à se rapprocher. De plus, la planète possède un mouvement keplerien circulaire.

En considérant le problème des trois corps restreint circulaire, le petit corps a une masse négligeable par rapport aux deux autres objets célestes. Il ne les perturbe donc pas dans leur mouvement. De plus, afin de trouver une solution analytique à ce changement d'orbite, nous supposons que, lorsque la planète et le petit corps sont éloignés l'un de l'autre, ce dernier n'est pas influencé par la planète. Le deuxième terme du membre de droite de la deuxième équation de (3.10) est alors nul. Le petit corps a donc un mouvement elliptique keplerien non perturbé autour du Soleil.

Tant que les deux corps orbitant autour du Soleil ne se rapprochent pas, nous travaillons avec deux problèmes des deux corps séparés : celui entre le Soleil et la planète et celui entre le Soleil et le petit corps où les masses de ces deux corps sont considérées comme négligeables par rapport à celle du Soleil.

Cependant, dans le modèle utilisant la théorie d'Öpik, le petit corps et la planète sont amenés à se rapprocher. Lorsque ce rapprochement se produit, nous ne pouvons plus ignorer l'influence de la planète sur le petit corps. En effet, l'attraction gravitationnelle de la planète sur ce dernier devient de plus en plus importante par rapport à celle du Soleil. Nous étudions alors le mouvement local du petit corps par rapport à la planète.

Dans cette étude locale, nous pouvons représenter le mouvement du corps autour de la planète comme étant une hyperbole dont l'un des foyers est la planète. Cependant, afin d'obtenir des résultats analytiques, nous le simplifions en considérant que le petit corps se déplace sur les asymptotes entrante et sortante de l'hyperbole.

De plus, dans notre modèle, le changement de trajectoire se fait de manière instantanée, à un temps t_b . Il a lieu lorsque le petit corps entre dans le plan contenant la planète, et perpendiculaire à l'asymptote entrante de l'hyperbole. Nous appelons dès à présent ce plan le "b-plan", d'après le terme utilisé par G.B. Valsecchi et al. dans leur article [17]. Suite à ce changement instantané de trajectoire du petit corps à l'instant t_b , son mouvement s'effectue sur une droite parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole.

Enfin, nous choisissons un système d'unités tel que la distance entre la planète et le Soleil vaut 1 unité et tel que la masse du Soleil ainsi que la constante gravitationnelle soient égales à 1.

Grâce à ce modèle, nous pourrions déterminer le changement d'orbite du petit corps suite à son rapprochement avec la planète au travers de la modification de ses éléments orbitaux. Nous noterons également que le rapprochement peut être vu comme un contournement de la planète par le petit corps.

4.2 Les positions des deux corps hors rencontre

Dans un premier temps, nous commençons par décrire la position de la planète et du petit corps par rapport au Soleil en dehors de tout rapprochement. Dans notre modèle, ceux-ci ont une orbite héliocentrique. Nous avons alors besoin d'un repère orthonormé dont l'origine est le Soleil pour déterminer la position des deux corps. De plus, grâce aux simplifications de notre modèle, les mouvements de la planète et du petit corps par rapport au Soleil peuvent respectivement être étudiés comme des problèmes de deux corps. En effet, ils ont chacun une orbite keplerienne. Chaque corps se déplace donc dans un plan orthogonal à son propre moment cinétique. Nous choisissons dès lors notre repère orthonormé tel que le plan défini par les deux premiers axes est le plan contenant l'orbite de la planète. Ce dernier est appelé, comme dans le chapitre 2, le plan de référence. Le troisième axe de notre repère est alors choisi comme étant l'axe parallèle au moment cinétique de la planète passant par le Soleil. Notre repère orthonormé choisi est nommé $\vec{e}_1\text{-}\vec{e}_2\text{-}\vec{e}_3$ et est représenté à la FIGURE 4.1 .

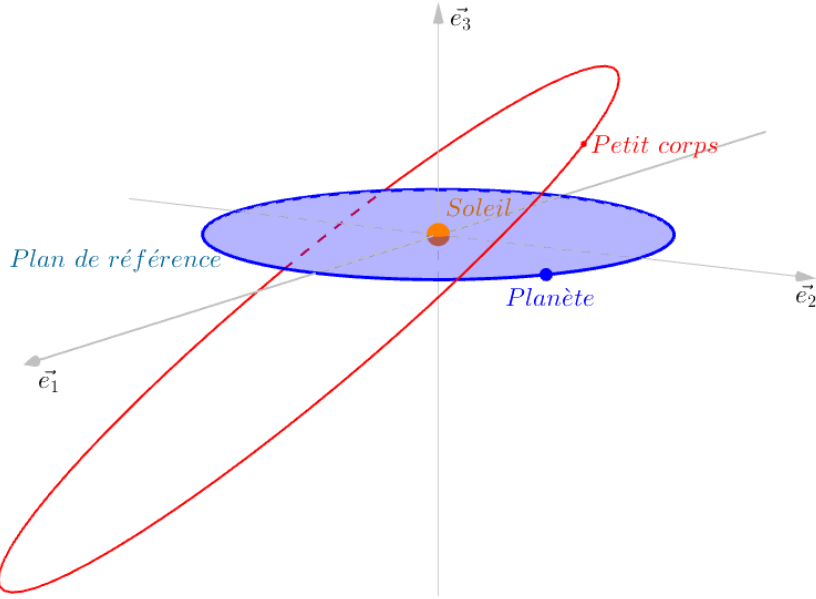


FIGURE 4.1 – Représentation du repère orthonormé dont le Soleil est l'origine et dont le plan de référence se situe sur le plan de l'orbite de la planète.

La planète se déplace sur une orbite circulaire. Dès lors, pour déterminer sa position dans le repère orthonormé, nous utiliserons les coordonnées sphériques. Grâce à notre choix d'unités ainsi qu'à notre choix de repère, la distance entre la planète et le Soleil vaut 1 et sa latitude est nulle¹. Nous noterons alors la longitude de la planète λ_p . La position de la planète est déterminée en tout temps par

$$\begin{cases} x_p &= \cos(\lambda_p) \\ y_p &= \sin(\lambda_p) \\ z_p &= 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

En ce qui concerne le petit corps, nous savons que son orbite est elliptique. Nous pouvons alors repérer sa position grâce à ses éléments orbitaux. Le petit corps ne possédant pas un mouvement perturbé son anomalie vraie est l'unique élément parmi les six éléments orbitaux à varier au cours du temps. La forme et l'inclinaison de l'ellipse représentant l'orbite du petit corps sont déterminées grâce à son demi-grand axe, noté a , à son excentricité, notée e et à son inclinaison, notée i . Sur cette ellipse, la position du petit corps est donnée par les éléments orbitaux angulaires suivants : la longitude du nœud ascendant, noté Ω ; l'argument du périhélie, noté ω ; et l'anomalie vraie, notée $f(t)$. Ces trois éléments, ainsi que l'inclinaison de l'orbite du petit corps, sont représentés sur la FIGURE 4.2 où $f = f(t)$.

Nous connaissons à présent la position de la planète et du petit corps par rapport au Soleil en tout temps. Nous pouvons donc déterminer la position de ces deux corps lors d'une rencontre donnant lieu à un changement d'orbite du petit corps. Ce type de rencontre se produit lorsque l'influence de la planète sur le petit corps est aussi ample que celle du Soleil. Dès lors, les deux corps doivent être assez proches l'un de l'autre. Afin d'observer cette proximité, nous comparons les positions des deux corps. Malheureusement, les coordonnées des deux objets célestes ne nous permettent pas de comparer directement leurs positions. Nous allons alors déterminer les coor-

1. Notre plan de référence coïncide avec le cercle de base dans la définition de la longitude et de la latitude d'un corps présentée dans le premier chapitre.

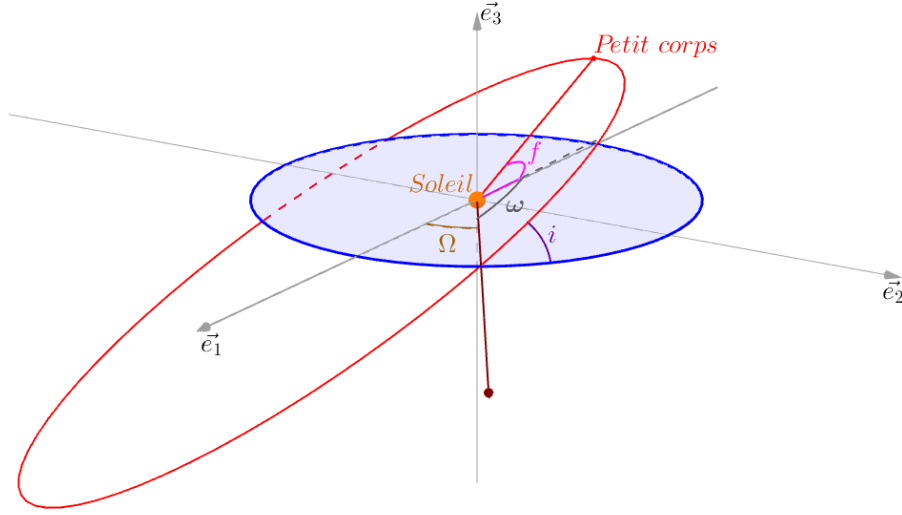


FIGURE 4.2 – Représentation de l'inclinaison de l'orbite du petit corps et de ses trois éléments orbitaux angulaires : ω , Ω et f .

données sphériques du petit corps sur base de ses éléments orbitaux.

Tout d'abord, la position du petit corps en tout temps déterminée grâce à ses coordonnées sphériques est

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \lambda \cos \beta \\ x_2 = r \sin \lambda \cos \beta \\ x_3 = r \sin \beta. \end{cases} \quad (4.2)$$

où λ , β et r représentent respectivement sa longitude, sa latitude et sa distance au Soleil. Ensuite, afin d'exprimer ces coordonnées sphériques en fonction des éléments orbitaux du petit corps, nous les représentons tous sur une même figure, la FIGURE 4.3, en un temps t fixé. Ce temps arbitraire t est choisi de manière à ce que le petit corps soit loin d'une rencontre avec la planète. Sur la FIGURE 4.3, nous notons l'anomalie vraie en ce temps t par f .

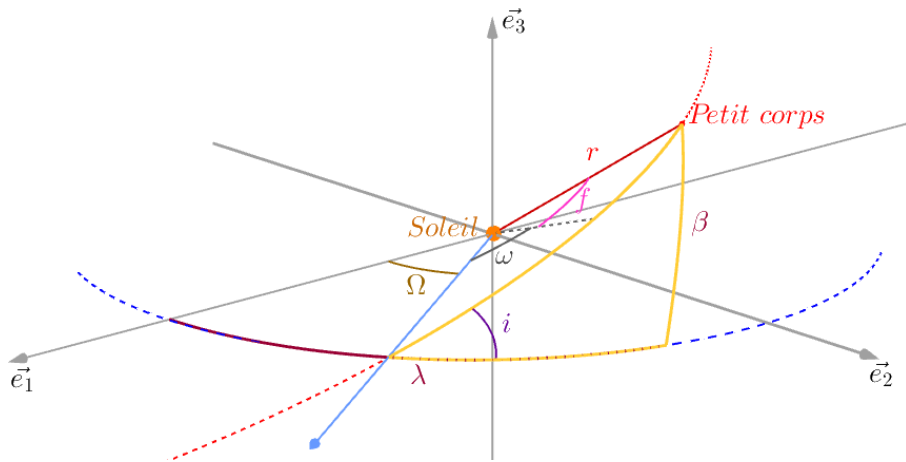


FIGURE 4.3 – Représentation des éléments orbitaux angulaires, de l'inclinaison de l'orbite et des coordonnées sphériques du petit corps. Apparition d'un triangle sphérique en jaune nous permettant de lier les éléments orbitaux aux coordonnées sphériques du petit corps.

Nous pouvons alors remarquer que les angles $\omega + f$, β et $\lambda - \Omega$ sont sous-tendus par des arcs de cercles formant un triangle sphérique, représenté en jaune sur la FIGURE 4.3. Cependant, ce triangle sphérique se trouve sur une sphère de rayon r . Par conséquent, la longueur de ces arcs de cercle dépend elle aussi de cette distance r . Pour obtenir des relations entre les angles des éléments orbitaux et la longitude et la latitude du petit corps indépendantes de cette distance, nous allons travailler dans un triangle sphérique semblable à celui de la FIGURE 4.3 situé sur une sphère de rayon 1. Ce triangle sphérique semblable est représenté à la FIGURE 4.4.

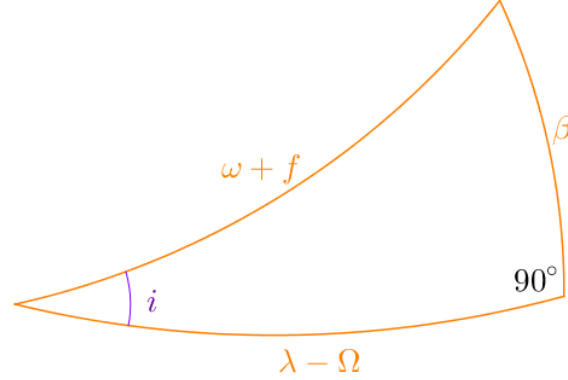


FIGURE 4.4 – Représentation du triangle sphérique semblable à celui de la FIGURE 4.3 sur une sphère de rayon 1.

Nous pouvons désormais lier les éléments orbitaux à la longitude et à la latitude du petit corps au temps fixé t grâce aux relations entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, rappelées dans le cours de Mécanique céleste classique [5] de Luc Duriez. Nous commençons par la formule des cotangentes qui lie deux côtés et deux angles, dont un des deux angles est adjacent aux deux côtés. Dans notre cas, les deux côtés sont représentés par $\lambda - \Omega$ et $\omega + f$. Les deux angles sont 90° et i . Ce dernier est l'angle adjacent aux deux côtés. La formule des cotangentes nous donne alors

$$\begin{aligned} \sin(\lambda - \Omega) \cot(\omega + f) &= \sin i \cot(90^\circ) + \cos(\lambda - \Omega) \cos i \\ \Leftrightarrow \tan(\lambda - \Omega) &= \cos i \tan(\omega + f). \end{aligned}$$

L'expression de la longitude du petit corps en fonction des éléments orbitaux est

$$\lambda = \Omega + \arctan(\cos i \tan(\omega + f)). \quad (4.3)$$

Ensuite, nous utilisons la formule des sinus liant deux côtés et les deux angles opposés à chacun des côtés. Nous prenons les côtés comme étant $\omega + f$ et β et les angles opposés à chacun de ces côtés comme étant l'angle de 90° et l'angle i . En appliquant cette formule, nous obtenons

$$\sin(\omega + f) \sin i = \sin \beta \sin(90^\circ).$$

L'expression de la latitude de petit corps en fonction des éléments orbitaux est, quant à elle,

$$\beta = \arcsin(\sin(\omega + f) \sin i). \quad (4.4)$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver l'expression de la distance entre le petit corps et le Soleil en fonction des éléments orbitaux. Grâce à la résolution du problème des deux corps faite dans le chapitre 2, nous connaissons cette distance par rapport au Soleil en tout temps. En particulier

dans le cas d'une orbite elliptique, elle est donnée par (2.13). Dès lors, la distance entre les deux corps au temps t fixé est

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (4.5)$$

Nous avons alors trouvé les expressions de la longitude, de la latitude du petit corps et de la distance entre celui-ci et le Soleil en un temps arbitraire fixé. Ce dernier étant arbitraire, nous pouvons en déduire que la position du petit corps en tout temps est donnée par (4.2) où r , λ et β sont les coordonnées sphériques du petit corps déterminées sur base des éléments orbitaux par les relations (4.5), (4.3) et (4.4).

4.3 L'entrée dans la sphère d'influence

Nous allons à présent nous intéresser au rapprochement du petit corps et de la planète. Nous savons par notre modèle que, lors de ce rapprochement, la planète joue un rôle plus important que le Soleil sur le petit corps. Nous pouvons d'ailleurs considérer que, lors du rapprochement, seule la planète attire le petit corps. Celui-ci entre alors dans ce que nous appellerons "la sphère d'influence" de la planète. Ce terme est celui utilisé dans le cours de Mécanique céleste classique [5] de Luc Duriez. Il définit la sphère d'influence comme étant une sphère centrée en la planète dans laquelle l'influence gravitationnelle de cette dernière sur un corps est plus forte que celle du Soleil. De plus, dans cette sphère, il est préférable de représenter le mouvement du corps comme un mouvement local autour de la planète.

Par conséquent, pour entrer dans cette sphère d'influence, le petit corps doit se trouver assez proche de la planète. Puisque nous avons la possibilité de comparer les positions des deux corps grâce à leurs coordonnées sphériques respectives, nous pouvons établir un critère de proximité. Nous considérons que les deux corps sont proches lorsque le carré de la différence entre leurs longitudes, celui de la différence entre leurs latitudes et celui de la différence entre leurs distances au Soleil sont négligeables. Nous notons cet instant t_0 . Dès lors, au temps t_0 , les quantités

$$\begin{aligned} \Delta r &= r - 1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f_0} - 1 ; \\ \Delta \lambda &= \lambda - \lambda_p = \Omega + \arctan(\cos i \tan(w + f_0)) - \lambda_p ; \\ \Delta \beta &= \beta - 0 = \arcsin(\sin(w + f_0) \sin i) ; \end{aligned}$$

où f_0 est l'anomalie vraie du petit corps au temps t_0 , sont petites.

Nous avons choisi ce critère spécifiant la proximité des deux corps pour englober les différents cas de rencontre. En effet, lorsque l'inclinaison de l'orbite du petit corps est très petite², la rencontre ne se fait pas à un endroit spécifique de l'orbite du petit corps. En revanche, si l'inclinaison n'est pas petite, la rencontre se déroule soit près du nœud ascendant, soit près du nœud descendant de l'orbite du petit corps.

Une fois ce critère respecté, notre petit corps se situe dans la sphère d'influence de la planète. Dans celle-ci, nous étudierons le mouvement du petit corps par rapport à la planète. Dès lors, nous

2. D'après l'article de G.B. Valsecchi de 2006 [16], nous considérons une inclinaison très petite comme étant une inclinaison plus petite qu'un demi degré.

nous munissons d'un repère orthonormé dont l'origine est cette dernière. De plus, nous choisissons le premier axe de notre repère de manière à ce que le Soleil se situe sur la branche négative de l'axe, à 1 unité de la planète, selon le choix de notre système d'unités. Le deuxième axe se place le long du vecteur vitesse héliocentrique de la planète. Et enfin, le troisième axe est dans la direction du moment cinétique de la planète. Nous décrirons alors le mouvement du petit corps dans ce nouveau repère $\vec{X}-\vec{Y}-\vec{Z}$, qui est représenté sur la FIGURE 4.5. Sur celle-ci, nous représentons également le repère héliocentrique utilisé précédemment.

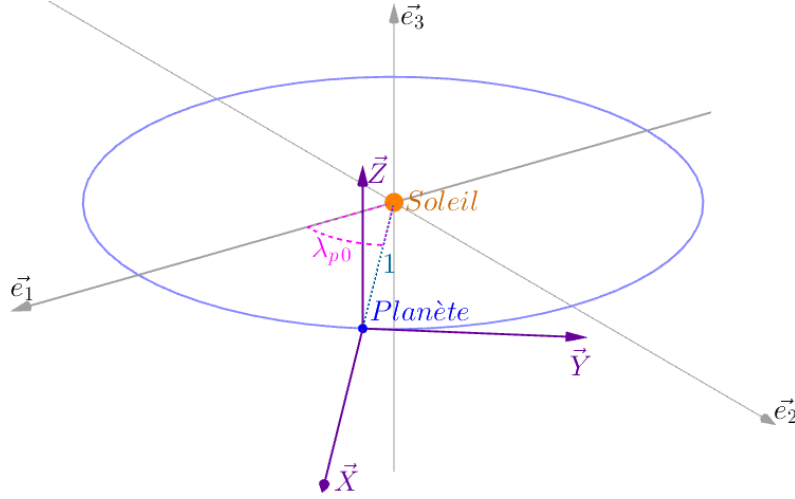


FIGURE 4.5 – Représentation du repère orthonormé $\vec{X}-\vec{Y}-\vec{Z}$ dont l'origine est la planète et du repère héliocentrique dont l'origine est le Soleil.

Nous pouvons d'ores et déjà exprimer la position du petit corps dans ce repère lors de son entrée dans la sphère d'influence. En effet, au temps t_0 , le nouveau repère planétocentrique est construit sur base du référentiel héliocentrique à l'aide d'une translation du vecteur $(1\ 0\ 0)^T$ et d'une rotation autour du troisième axe d'un angle identique à la longitude de la planète au temps t_0 , notée λ_{p0} comme indiqué sur la FIGURE 4.5.

Tout d'abord, nous exprimons les composantes du vecteur position du petit corps dans le nouveau repère grâce à celles dans le repère héliocentrique, données par (4.2). En suivant le rappel du point 1.2 sur le changement de repère, nous effectuons une rotation de $(-\lambda_{p0})$ et une translation de vecteur $-(1\ 0\ 0)^T$ à partir du vecteur position du petit corps dans le repère héliocentrique pour obtenir les composantes du vecteur position du petit corps dans le nouveau référentiel. Celles-ci sont

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_{p0}) & \sin(\lambda_{p0}) & 0 \\ -\sin(\lambda_{p0}) & \cos(\lambda_{p0}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $(x_0\ y_0\ z_0)^T$ est le vecteur position du petit corps dans le repère planétocentrique et $(x_1\ x_2\ x_3)^T$ est celui dans le repère héliocentrique au temps t_0 . En remplaçant les composantes de ce dernier

vecteur, connues par (4.2), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\lambda_{p0}) & \sin(\lambda_{p0}) & 0 \\ -\sin(\lambda_{p0}) & \cos(\lambda_{p0}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \lambda \cos \beta \\ r \sin \lambda \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \beta (\cos(\lambda_{p0}) \cos \lambda + \sin(\lambda_{p0}) \sin \lambda) - 1 \\ r \cos \beta (-\sin(\lambda_{p0}) \cos \lambda + \cos(\lambda_{p0}) \sin \lambda) \\ r \sin \beta \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \Delta\beta \cos(\Delta\lambda) - 1 \\ r \cos \Delta\beta \sin(\Delta\lambda) \\ r \sin \Delta\beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ensuite, lorsque nous sommes dans la sphère d'influence, les quantités $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ et Δr sont petites et leurs carrés sont négligeables. En utilisant cette dernière information dans les développements de Maclaurin des fonctions cosinus de $\Delta\lambda$, cosinus de $\Delta\beta$ et sinus de $\Delta\lambda$, nous obtenons les approximations suivantes

$$\begin{aligned}
\cos \Delta\lambda &\simeq 1; \\
\cos \Delta\beta &\simeq 1; \\
\sin \Delta\lambda &\simeq \Delta\lambda.
\end{aligned}$$

Les composantes du vecteur position planétocentrique du petit corps au temps t_0 sont alors

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 1 \\ r\Delta\lambda \\ r \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

En reprenant les expressions de la longitude et de la latitude du petit corps et celle de la distance entre le petit corps et le Soleil par rapport à ses éléments orbitaux, données respectivement par (4.3), (4.4) et (4.5), nous en déduisons que les composantes du vecteur position planétocentrique du petit corps au temps t_0 par rapport aux éléments orbitaux sont

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} - 1 \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} [\Omega + \arctan(\cos i \tan(w + f_0)) - \lambda_p] \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} \sin(w + f_0) \sin i \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

4.4 L'approche du contournement

Dans ce point, nous allons étudier le mouvement du petit corps dans la sphère d'influence de la planète. Dans celle-ci, le mouvement du petit corps autour de la planète peut être représenté par une hyperbole. Cependant, dans notre modèle, nous considérons que le petit corps se déplace le long de l'asymptote entrante de l'hyperbole avant de changer instantanément de trajectoire et de se déplacer le long d'une droite parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole. De plus, dans

cette sphère d'influence, nous supposons que le petit corps n'est influencé que par la planète. Dès lors, le petit corps possède un vecteur vitesse planétocentrique non perturbé situé le long de ces asymptotes de l'hyperbole. Dans cette partie, nous étudierons le mouvement rectiligne du petit corps le long de l'asymptote entrante, avant son changement instantané de trajectoire.

Lors de son entrée dans la sphère d'influence, au temps t_0 , la position du petit corps est donnée par le vecteur $(x_0 \ y_0 \ z_0)^T$, et son expression par rapport aux éléments orbitaux est donnée par (4.7). À partir de cette position, le petit corps est entraîné, par son vecteur vitesse planétocentrique noté \vec{U} , le long de la droite représentant l'asymptote entrante de l'hyperbole, comme représenté sur la FIGURE 4.6. Son vecteur position dans la sphère d'influence, au cours du temps, est alors

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x(t - t_0) + x_0 \\ U_y(t - t_0) + y_0 \\ U_z(t - t_0) + z_0 \end{pmatrix}$$

où U_x, U_y et U_z représentent les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse planétocentrique \vec{U} .

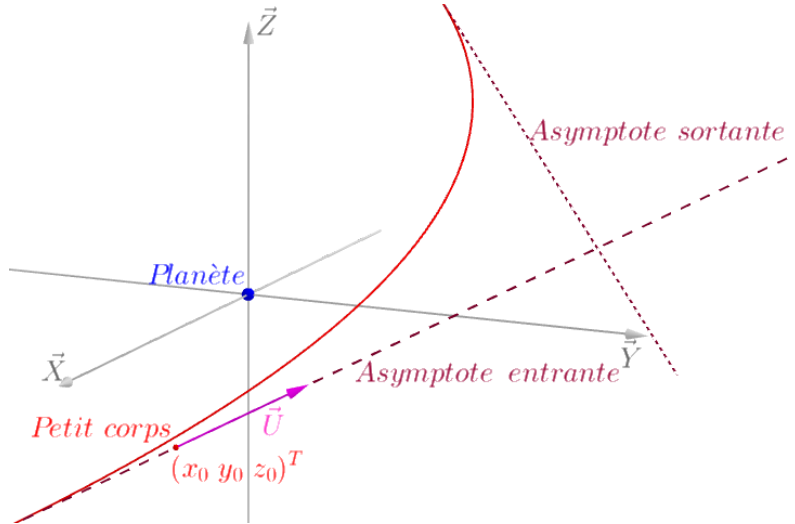


FIGURE 4.6 – Représentation du déplacement du petit corps le long de l'asymptote entrante de l'hyperbole. La condition initiale de son mouvement est donnée par $(x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ et sa direction est celle du vecteur vitesse \vec{U} .

Tout comme la position du petit corps au temps t_0 , nous pouvons exprimer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse \vec{U} en fonction des éléments orbitaux. Sur base du détail des calculs faits dans l'annexe A, nous obtenons

$$\begin{cases} U_x = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{a} - a(1 - e^2)} \\ U_y = \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i - 1 \\ U_z = \sqrt{a(1 - e^2)} \sin i \end{cases} \quad (4.8)$$

et

$$U = \|\vec{U}\| = \sqrt{3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i}. \quad (4.9)$$

Cette norme du vecteur vitesse \vec{U} peut être écrite à l'aide du paramètre de Tisserand du petit corps par rapport à la planète comme

$$U = \sqrt{3 - T}.$$

Ce paramètre de Tisserand, décrit dans le chapitre 3 de l'ouvrage [10] de C.D. Murray et S.F. Dermott, reste invariant lors du contournement d'un corps par un deuxième corps. En effet, lorsque nous évaluons ce paramètre avec les éléments orbitaux avant le changement d'orbite ou avec ceux après le changement d'orbite dû à ce contournement, celui-ci garde la même valeur. Nous pouvons alors lier les éléments orbitaux du petit corps relatifs à l'avant-rencontre et à l'après-rencontre par la relation dite de Tisserand.

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i = \frac{1}{a'} + 2\sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i' \quad (4.10)$$

où a' , e' et i' représentent respectivement le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison de la nouvelle orbite du petit corps après le contournement de la planète. Nous en déduisons alors que la norme du vecteur \vec{U} reste invariante lors du changement d'orbite du petit corps.

De plus, l'orbite hyperbolique du petit corps nous garantit que le paramètre de Tisserand est inférieur à 3. En reprenant l'expression de l'énergie (2.8), déterminée dans l'étude du problème des deux corps, pour le petit corps et la planète, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2}U^2 - \frac{\mu}{\Delta r} \\ \Leftrightarrow U^2 &= 2E_t + \frac{2\mu}{\Delta r}. \end{aligned}$$

L'énergie du petit corps par rapport à la planète, E_t , est positive car celui-ci se déplace sur une orbite hyperbolique. Nous obtenons alors une somme de termes positifs impliquant que le carré de la norme de \vec{U} soit positif. Or, l'expression de ce carré en fonction des éléments orbitaux est

$$\begin{aligned} U^2 &= 3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i \\ &> 0 \\ \Rightarrow 3 &> \frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i \\ \Leftrightarrow 3 &> T. \end{aligned}$$

Nous pouvons également déterminer les coordonnées sphériques du vecteur \vec{U} . Cependant, la théorie d'Öpik travaille avec des coordonnées sphériques un peu particulières de ce vecteur \vec{U} , qu'elle nomme d'ailleurs les variables d'Öpik. Nous définissons ces coordonnées telles que la première coordonnée est la norme du vecteur \vec{U} , la deuxième est l'angle, noté θ , allant du vecteur vitesse de la planète vers le vecteur \vec{U} . Ce vecteur vitesse de la planète étant parallèle à l'axe \vec{Y} de notre repère local, nous pouvons définir la deuxième coordonnée comme étant l'angle entre cet axe et le vecteur \vec{U} . De plus, cet angle θ possède une valeur comprise entre 0° et 180° . La troisième coordonnée est représentée par ϕ et désigne l'angle entre le plan formé des axes \vec{Y} et \vec{Z} et le plan contenant l'axe \vec{Y} et le vecteur \vec{U} . Ces trois coordonnées, désignant les trois premières variables d'Öpik, sont représentées à la FIGURE 4.7. Dans celle-ci, nous avons deux points de

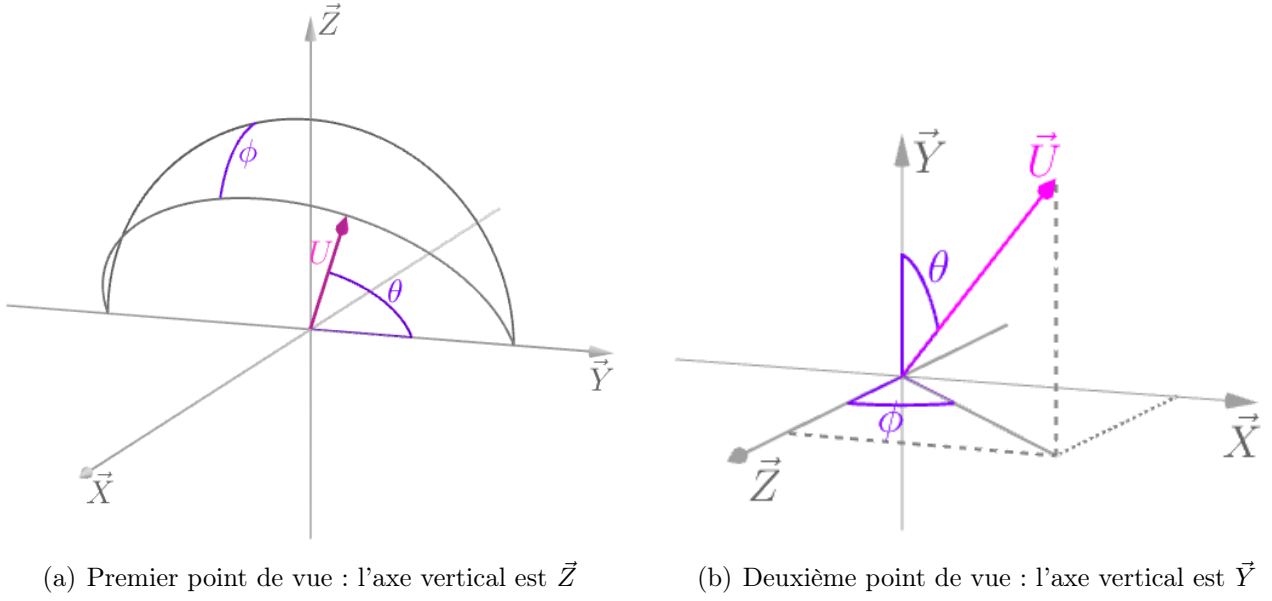


FIGURE 4.7 – Représentation des trois premières variables d'Öpik U , θ et ϕ dans le repère planétocentrique.

vue de la même représentation.

De plus, ces coordonnées sphériques particulières sont liées aux coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{U} par les relations

$$\begin{cases} U_x = U \sin \theta \sin \phi \\ U_y = U \cos \theta \\ U_z = U \sin \theta \cos \phi. \end{cases} \quad (4.11)$$

Par conséquent, nous exprimons le mouvement rectiligne du petit corps le long de l'asymptote entrante de l'hyperbole à l'aide de ces trois premières variables d'Öpik.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \sin \theta \sin \phi (t - t_0) + x_0 \\ U \cos \theta (t - t_0) + y_0 \\ U \sin \theta \cos \phi (t - t_0) + z_0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Les valeurs de ces trois variables peuvent être directement calculées grâce aux éléments orbitaux du petit corps. En effet, les relations suivantes, détaillées dans l'annexe B.1, lient les

expressions des variables d'Öpik aux éléments orbitaux.

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{1 - U^2 - \frac{1}{a}}{2U}, \\
\sin \theta &= \frac{\sqrt{2 - a(1 - e^2) \cos^2 i - \frac{1}{a}}}{U}, \\
\sin \phi &= \pm \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{a} - a(1 - e^2)}}{U \sin \theta}, \\
\cos \phi &= \pm \frac{\sqrt{a(1 - e^2)} \sin i}{U \sin \theta}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

où $U = \sqrt{3 - T}$. Le signe du cosinus de ϕ dépend de l'endroit de la rencontre entre les deux corps sur la ligne des nœuds. Le signe du sinus de ϕ , quant à lui, est choisi en fonction de la position du petit corps par rapport au périhélie de son orbite elliptique lors de cette rencontre. Sur base de l'article de G.B. Valsecchi [16], nous considérons que le sinus est positif lorsque la rencontre a lieu sur la branche post-périhélie de l'orbite du petit corps, et qu'il est négatif lorsque le contournement se produit sur la branche pré-périhélie. Le cosinus est positif lorsque la rencontre se situe proche du nœud ascendant, et négatif lorsqu'elle se trouve à proximité du nœud descendant.

Cependant, pour plus de facilité lors du calcul des valeurs des trois variables d'Öpik, nous souhaitons pouvoir déterminer le signe du sinus et du cosinus de ϕ sans devoir déterminer au préalable l'endroit de la rencontre par rapport à l'orbite du petit corps. Nous remplaçons le signe du sinus de ϕ par le signe du sinus de l'anomalie vraie du petit corps lors de la rencontre. Le signe du cosinus de ϕ est remplacé par le signe du cosinus de la somme entre l'anomalie vraie et l'argument du périhélie du petit corps lors de cette même rencontre. En effet, en regardant la TABLE 4.1, nous remarquons que, pour un même endroit de rencontre, le signe de ces quantités correspond aux signes du cosinus et du sinus de ϕ . Dès lors, la valeur de cette variable d'Öpik, ou plus précisément le quadrant auquel elle appartient dans le cercle trigonométrique, nous donne une information sur la configuration de la rencontre par rapport à l'orbite du petit corps. La FIGURE 4.8 reprend chacune des configurations relatives au quadrant auquel la valeur de ϕ appartient.

De ce fait, les expressions du sinus et du cosinus de ϕ peuvent être réécrites comme

$$\begin{aligned}
\sin \phi &= \frac{\sin f_0}{|\sin f_0|} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{a} - a(1 - e^2)}}{U \sin \theta} \\
\cos \phi &= \frac{\cos(\omega + f_0)}{|\cos(\omega + f_0)|} \frac{\sqrt{a(1 - e^2)} \sin i}{U \sin \theta}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous notons que ces expressions sont valables pour des rencontres ne se produisant pas sur la ligne des nœuds.

4.5 Le lieu de la rencontre

Nous allons maintenant déterminer le lieu et l'instant auxquels le petit corps change instantanément de trajectoire avant d'étudier ce changement proprement dit. Selon notre modèle, le

Branche pré-périhélie de l'orbite	$\sin \phi < 0$	$180^\circ < f < 360^\circ$	$\sin f < 0$
Branche post-périhélie de l'orbite	$\sin \phi > 0$	$0^\circ < f < 180^\circ$	$\sin f > 0$
Rencontre proche du nœud ascendant	$\cos \phi > 0$	$-90^\circ < f + \omega < 90^\circ$	$\cos(f + w) > 0$
Rencontre proche du nœud descendant	$\cos \phi < 0$	$90^\circ < f + \omega < 270^\circ$	$\cos(f + w) < 0$

TABLE 4.1 – Les deux premières lignes désignent la correspondance entre la position du petit corps par rapport à son périhélie lors de la rencontre, le signe du sinus de la variable d'Öpik ϕ et celui du sinus de l'anomalie vraie du petit corps. Les deux dernières lignes représentent la correspondance entre l'endroit de la rencontre, le signe du cosinus de la variable d'Öpik ϕ et celui du cosinus de la somme de l'anomalie vraie et de l'argument du périhélie.

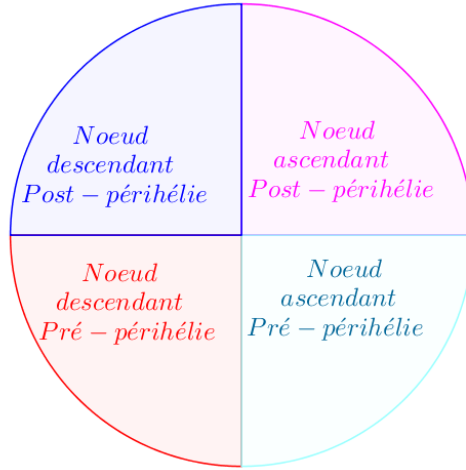


FIGURE 4.8 – Représentation des différentes configurations possibles de la rencontre par rapport à l'orbite du petit corps lors de la rencontre en fonction du quadrant auquel la variable d'Öpik ϕ appartient.

mouvement du petit corps s'effectue le long de l'asymptote entrante avant de changer de direction et de se déplacer le long d'une droite parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole. Cette modification de direction se produit lorsque le petit corps croise un plan particulier nommé "le b-plan", pour reprendre le terme de G.B. Valsecchi et al. dans [17]. Nous définissons celui-ci comme étant le plan contenant la planète, et perpendiculaire à l'asymptote entrante de l'hyperbole. Or, la direction de cette asymptote entrante est celle du vecteur vitesse planétocentrique du petit corps. Dès lors, nous pouvons définir le b-plan comme étant le plan contenant la planète et de vecteur normal \vec{U} . Nous le représentons à la FIGURE 4.9. Nous pouvons à présent caractériser le lieu du changement instantané de trajectoire. Celui-ci se trouve à l'intersection entre le b-plan et la trajectoire rectiligne du petit corps.

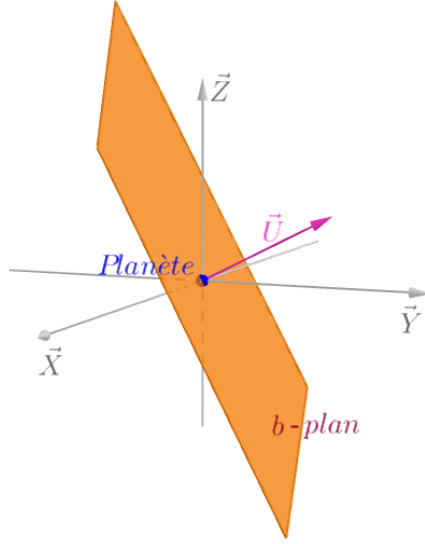


FIGURE 4.9 – Représentation du *b-plan* contenant la planète et perpendiculaire au vecteur \vec{U} .

Ensuite, nous déterminons l'instant auquel ce changement instantané se produit. Nous devons déterminer l'instant auquel le petit corps croise le *b-plan*. Or, lorsque le petit corps croise ce *b-plan*, il se situe au plus près de la planète. Nous cherchons donc le temps correspondant à la plus petite distance entre le petit corps et la planète.

La distance entre le petit corps et la planète, dans le repère planétocentrique, est représentée par la norme du vecteur position du petit corps. En reprenant ses composantes (4.12), le carré de cette norme, représentant la distance en un temps t quelconque, est

$$\begin{aligned} D(t)^2 &= x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 \\ &= (U \sin \theta \sin \phi(t - t_0) + x_0)^2 + (U \cos \theta(t - t_0) + y_0)^2 + (U \sin \theta \cos \phi(t - t_0) + z_0)^2. \end{aligned}$$

En suivant le détail des calculs réalisés dans l'annexe B.2, la distance entre le petit corps et la planète au temps t peut s'exprimer en fonction des trois premières variables d'Öpik, de la position du petit corps au temps t_0 et de ce temps t_0 comme

$$\begin{aligned} D(t)^2 &= U^2 t^2 + 2Ut [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - Ut_0] \\ &\quad - 2Ut_0 \left[x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - \frac{Ut_0}{2} \right] + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{aligned}$$

Cette expression correspond à celle d'une fonction du second degré en t . De plus, le coefficient précédant le terme du degré 2 est positif. Par conséquent, cette expression possède un minimum et sa dérivée s'annule en ce minimum. Le temps que nous recherchons correspond donc à celui qui annule la dérivée de cette expression de la distance. Il est noté t_b et son expression est

$$\begin{aligned} \frac{d(D(t_b)^2)}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2U^2 t_b + 2U [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - Ut_0] &= 0 \\ \Leftrightarrow t_b &= - \frac{x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - Ut_0}{U} \\ \Leftrightarrow t_b &= t_0 - \frac{x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi}{U}. \end{aligned}$$

Grâce à cette expression du temps t_b , nous pouvons déterminer celle de la distance minimale entre les deux corps et celle de la position du petit corps lors de son croisement avec le b-plan, dans le repère planétocentrique. Premièrement, la distance minimale entre la planète et le petit corps est déterminée en remplaçant la variable t par t_b dans l'expression de $D(t)^2$ obtenue à l'instant. Grâce au détail des calculs réalisés dans l'annexe B.3, nous obtenons

$$D(t_b)^2 = (x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + [(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta]^2.$$

La distance minimale, que nous notons b , est alors

$$b = \sqrt{(x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + [(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta]^2}.$$

Celle-ci est appelé, selon G.B. Valsecchi et al. [20], le "paramètre d'impact".

Deuxièmement, la position du petit corps au temps t_b est déterminée à l'aide de la trajectoire rectiligne que le petit corps suit depuis son entrée dans la sphère d'influence. En effet, nous connaissons, par (4.12), la position du petit corps en tout temps dans la sphère d'influence. Ainsi, celle au temps t_b , notée $(x_b \ y_b \ z_b)^T$, est obtenue en remplaçant le temps t par t_b . Ses composantes sont

$$\begin{cases} x_b = x(t_b) = x_0 - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \sin \phi \\ y_b = y(t_b) = y_0 - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \cos \theta \\ z_b = z(t_b) = z_0 - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \cos \phi. \end{cases} \quad (4.15)$$

Lors de notre étude du changement instantané de trajectoire, ces expressions de la distance minimale et de la position du petit corps nous aideront à déterminer l'ensemble des éléments après la rencontre. Afin de simplifier ces expressions, nous pouvons introduire un nouveau référentiel, lié au b-plan, que nous appelons $\vec{\xi}$ - $\vec{\eta}$ - $\vec{\zeta}$. Nous construisons les premier et troisième axes pour être dans le b-plan et le deuxième axe pour être perpendiculaire au b-plan. Pour l'obtenir, nous appliquons deux rotations au repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} . La première est une rotation d'angle ϕ autour du deuxième axe. Elle consiste à amener l'axe \vec{X} dans le b-plan et définit alors le nouvel axe $\vec{\xi}$. La rotation suivante tourne les deuxième et troisième axes d'un angle θ . Elle amène alors le nouvel axe $\vec{\zeta}$ dans le b-plan et le nouvel axe $\vec{\eta}$ sur le vecteur \vec{U} . Par construction du b-plan, ce vecteur est normal à ce plan. Notre nouvel axe $\vec{\eta}$ est donc bien perpendiculaire au b-plan. Ce nouveau repère est représenté à la FIGURE 4.10 sous deux vues.

Désormais, nous exprimons le paramètre d'impact b et la position du petit corps $(x_b \ y_b \ z_b)^T$ dans ce nouveau repère. Sur base du rappel sur les changements de repère fait au point 1.2, nous multiplions les composantes du vecteur position dans le repère planétocentrique par une première matrice de rotation d'un angle $(-\theta)$ autour du premier axe et par une deuxième matrice de rotation d'un angle $(-\phi)$ autour du second axe. Le vecteur position dans le référentiel lié au

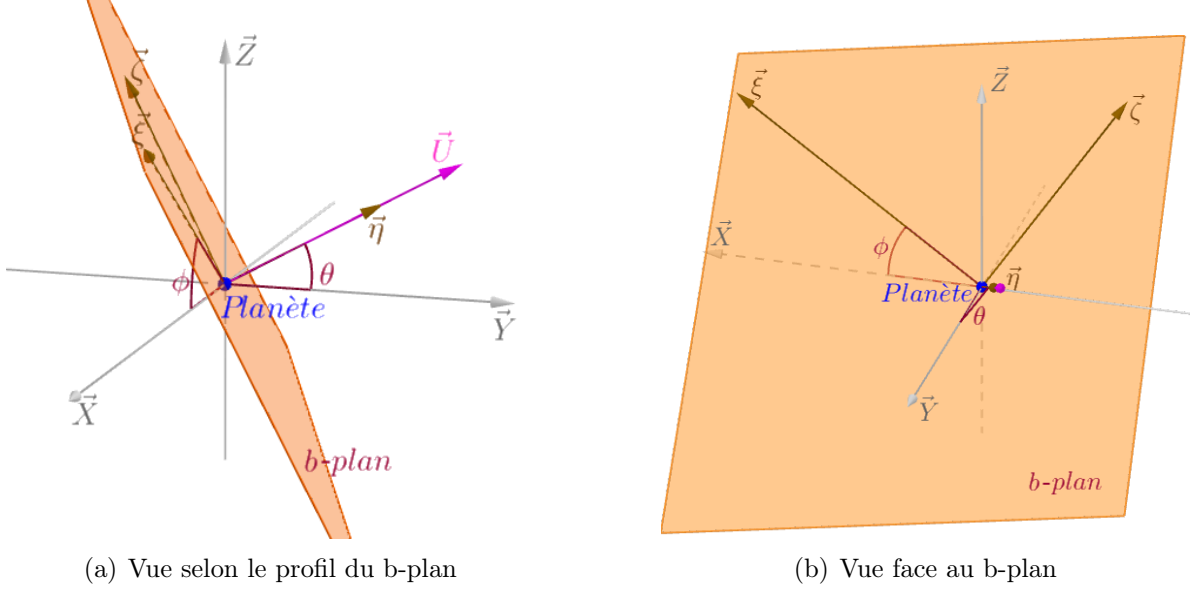


FIGURE 4.10 – Représentation du nouveau repère $\vec{\xi} - \vec{\eta} - \vec{\zeta}$ par rapport au repère $\vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z}$.

b-plan est noté $(\xi_b \ \eta_b \ \zeta_b)^T$ et ses composantes sont

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta_b \\ \zeta_b \end{pmatrix} &= R_1(-\theta) R_2(-\phi) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\
 &= R_1(-\theta) \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \cos \phi - z_b \sin \phi \\ y_b \\ x_b \sin \phi + z_b \cos \phi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_b \cos \phi - z_b \sin \phi \\ y_b \cos \theta + (x_b \sin \phi + z_b \cos \phi) \sin \theta \\ -y_b \sin \theta + (x_b \sin \phi + z_b \cos \phi) \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dans l'annexe B.4, nous avons remplacé la position du petit corps au temps t_b dans le repère $\vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z}$ par son expression donnée en (4.15). Les composantes du vecteur position dans le repère $\vec{\xi} - \vec{\eta} - \vec{\zeta}$ s'écrivent alors en fonction des variables d'Öpik, θ et ϕ , et de la position du petit corps $(x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ au temps t_0 .

$$\begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta_b \\ \zeta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi \\ 0 \\ (x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons immédiatement que la deuxième composante du vecteur position du petit corps est nulle. Le petit corps est donc bien dans le b-plan.

Ce vecteur position $(\xi_b \ \eta_b \ \zeta_b)^T$ dans le repère lié au b-plan est également noté \vec{b} . Celui-ci possède une extrémité sur la planète et l'autre à l'intersection entre le b-plan et la trajectoire rectiligne du petit corps. Il est donc contenu dans le b-plan. De plus, étant donné que le paramètre d'impact

représente la distance entre la planète et le petit corps lorsque celui-ci est dans le b-plan, la norme du vecteur \vec{b} est le paramètre d'impact b . Elle peut dès lors s'exprimer à l'aide des composantes du vecteur position du petit corps dans le repère lié au b-plan. En effet, son expression est

$$b = \sqrt{\xi_b^2 + \zeta_b^2}. \quad (4.16)$$

Nous avons à présent déterminé les six variables d'Öpik. Nous connaissons déjà les trois premières, U , θ et ϕ , permettant de repérer le vecteur \vec{U} dans le repère planétocentrique. Nous y ajoutons les variables ξ_b et ζ_b qui donnent la position du petit corps dans le b-plan, et le temps t_b indiquant l'instant auquel le changement instantané se produit. Par la suite, nous étudierons le changement d'expression de ces variables d'Öpik suite au changement instantané de direction du mouvement s'effectuant dans le b-plan.

4.6 Le changement instantané de trajectoire du petit corps

Nous allons maintenant nous intéresser au changement de direction du mouvement effectué par le petit corps dans le b-plan. Nous étudions l'impact du changement de trajectoire du petit corps sur les expressions des variables d'Öpik. Ces nouvelles expressions nous permettront alors de déduire, par après, le nouveau mouvement rectiligne du petit corps dans le repère planétocentrique, ainsi que ses nouveaux éléments orbitaux. Dans cette section, nous nous concentrons donc sur les nouvelles expressions des variables d'Öpik suite au changement de direction du déplacement du petit corps. Nous savons que ce dernier implique un changement de la trajectoire rectiligne du petit corps. En effet, le petit corps est entraîné, par son vecteur vitesse \vec{U} , sur l'asymptote entrante de l'hyperbole avant de croiser le b-plan et de se retrouver sur une droite parallèle à l'asymptote sortante. Le vecteur vitesse planétocentrique du petit corps va donc subir une rotation dans le b-plan afin de se situer le long de l'asymptote sortante de l'hyperbole. Nous notons ce vecteur après la rotation \vec{U}' . Nous utilisons alors cette rotation, permettant d'aller du vecteur \vec{U} vers le vecteur \vec{U}' , pour déterminer les nouvelles variables d'Öpik, notées U' , θ' , ϕ' , ξ'_b , ζ'_b et t'_b . Celles-ci gardent des caractéristiques équivalentes après le changement de trajectoire.

Pour établir les nouvelles expressions des variables d'Öpik, nous devons tout d'abord déterminer l'angle de rotation du vecteur \vec{U} lors de ce changement instantané. Étant donné que la direction du vecteur \vec{U} est parallèle à l'asymptote entrante, et que celle du vecteur \vec{U}' est parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole, nous en déduisons que l'angle de rotation est celui entre les deux asymptotes de l'hyperbole. La FIGURE 4.11 représente, dans le repère $\vec{\xi}$ - $\vec{\eta}$ - $\vec{\zeta}$, cet angle, nommé γ , entre les deux asymptotes de l'hyperbole. Nous retrouvons également cet angle entre les deux vecteurs vitesse du petit corps avant et après l'entrée de celui-ci dans le b-plan.

Ensuite, nous devons trouver l'axe autour duquel cette rotation a lieu. Sur base de ses caractéristiques, nous savons qu'elle se déroule dans le plan contenant les deux asymptotes de l'hyperbole. Or, par résolution du problème des deux corps, les deux asymptotes se trouvent dans le plan du mouvement du petit corps. Celui-ci est perpendiculaire au moment cinétique du petit corps. Nous construisons donc notre axe de rotation sur base de ce moment cinétique, exprimé dans le repère

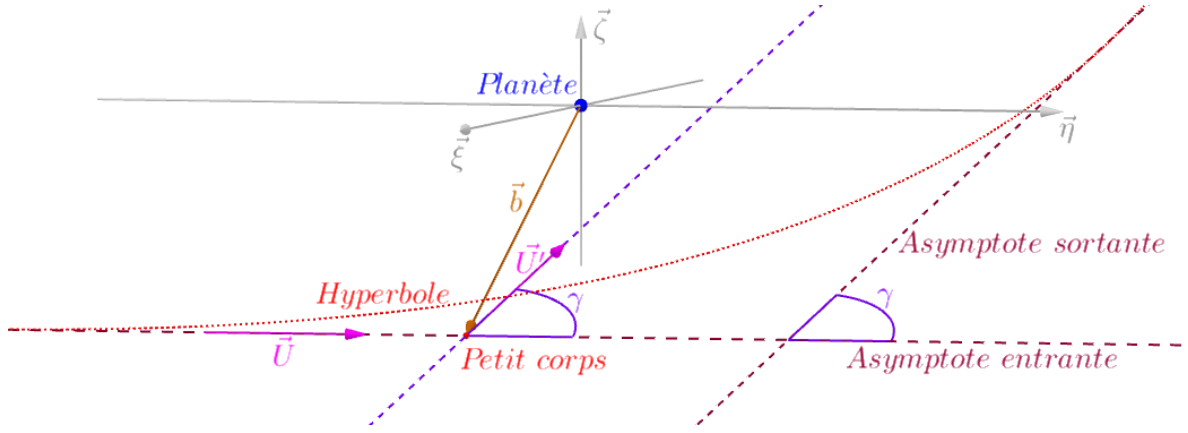


FIGURE 4.11 – Représentation de l'angle de rotation γ , de l'hyperbole et ses asymptotes, et des vecteurs vitesse avant et après la rotation.

$\vec{\xi} - \vec{\eta} - \vec{\zeta}$. Ce dernier est

$$\begin{aligned}
 [\vec{\sigma}_1]^{b-plan} &= \vec{b} \times \vec{U} \\
 &= \begin{vmatrix} \xi_b & 0 & \zeta_b \\ 0 & U & 0 \\ \vec{\xi} & \vec{\eta} & \vec{\zeta} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -U\zeta_b \\ 0 \\ U\xi_b \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'axe de rotation, nommé $\vec{\sigma}_u$, est obtenu comme étant l'axe normé situé le long du moment cinétique du petit corps. Il est représenté à la FIGURE 4.12. Dès lors, nous ajoutons une condition adéquate au vecteur $\vec{\sigma}_1$ afin que sa norme soit égale à 1 et nous obtenons l'axe de rotation $\vec{\sigma}_u$. En utilisant la relation (4.16) liant les composantes de la position du petit corps dans le b-plan au paramètre d'impact, cette condition est

$$\begin{aligned}
 \|\vec{\sigma}_u\| &= \sqrt{U^2\zeta_b^2 + U^2\xi_b^2} = 1 \\
 \Leftrightarrow 1 &= \sqrt{U^2(\zeta_b^2 + \xi_b^2)} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \sqrt{U^2b^2} \\
 \Rightarrow 1 &= Ub.
 \end{aligned}$$

Nous prenons la valeur positive de la racine car nous travaillons avec des normes. L'axe de rotation permettant de déterminer la rotation du vecteur \vec{U} est

$$\vec{\sigma}_u = \begin{pmatrix} -U\zeta_b \\ 0 \\ U\xi_b \end{pmatrix} \text{ où } Ub = 1. \quad (4.17)$$

Nous pouvons à présent déterminer la matrice relative à la rotation du vecteur \vec{U} de l'angle γ autour de l'axe $\vec{\sigma}_u$ pour obtenir les composantes du vecteur \vec{U}' . Étant donné que la rotation ne se fait pas autour d'un axe du repère, nous utilisons la forme générale de la matrice de rotation,

des variables θ' et ϕ' , nous devons chercher l'expression des composantes du vecteur \vec{U}' dans le repère $\vec{X}-\vec{Y}-\vec{Z}$. En effet, dans ce repère, ces nouvelles variables d'Öpik représentent une partie des coordonnées sphériques du vecteur \vec{U}' .

$$\left[\vec{U}'\right]^{planeto} = \begin{pmatrix} U \sin \theta' \sin \phi' \\ U \cos \theta' \\ U \sin \theta' \cos \phi' \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Pour déterminer ces composantes en fonction des anciennes variables d'Öpik, nous allons utiliser le vecteur vitesse \vec{U} et la matrice de rotation permettant de passer de ce vecteur \vec{U} au vecteur \vec{U}' . Tout d'abord, nous déterminons les expressions des composantes du vecteur \vec{U}' dans le repère $\vec{\xi}$ - $\vec{\eta}$ - $\vec{\zeta}$ en tournant le vecteur \vec{U} de l'angle γ .

$$\begin{aligned} \left[\vec{U}'\right]^{b-plan} &= R_{\vec{\sigma}_u}(\gamma) \left[\vec{U}\right]^{b-plan} \\ &= R_{\vec{\sigma}_u}(\gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -U^2 \xi_b \sin \gamma \\ U \cos \gamma \\ -U^2 \zeta_b \sin \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons commencer par remplacer les expressions du sinus et du cosinus de γ à l'aide des relations (4.19). En utilisant la relation (4.17) entre la norme U et le paramètre d'impact b , nos composantes du vecteur vitesse \vec{U}' dans le référentiel lié au b-plan deviennent

$$\begin{aligned} \left[\vec{U}'\right]^{b-plan} &= \begin{pmatrix} -U^2 \xi_b \frac{2bc}{b^2 + c^2} \\ U \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \\ -U^2 \zeta_b \frac{2bc}{b^2 + c^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2Uc \xi_b}{b^2 + c^2} \\ \frac{U(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \\ \frac{-2Uc \zeta_b}{b^2 + c^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent exprimer ces composantes du vecteur \vec{U}' dans le repère $\vec{X}-\vec{Y}-\vec{Z}$. En suivant le rappel sur les changements de repère du premier chapitre, nous les multiplions par les matrices de rotation traduisant le passage du référentiel planétocentrique vers le repère lié au

b-plan, comme illustré sur la FIGURE 4.10.

$$\begin{aligned}
[\vec{U}']^{planeto} &= R_2(\phi) R_1(\theta) [\vec{U}']^{b-plan} \\
&= R_2(\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2Uc\xi_b}{b^2+c^2} \\ \frac{U(b^2-c^2)}{b^2+c^2} \\ \frac{-2Uc\zeta_b}{b^2+c^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2Uc\xi_b}{b^2+c^2} \\ \frac{U(b^2-c^2)\cos \theta}{b^2+c^2} + \frac{2Uc\zeta_b \sin \theta}{b^2+c^2} \\ \frac{U(b^2-c^2)\sin \theta}{b^2+c^2} - \frac{2Uc\zeta_b \cos \theta}{b^2+c^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-2Uc\xi_b \cos \phi}{b^2+c^2} + \frac{U(b^2-c^2)\sin \theta \sin \phi}{b^2+c^2} - \frac{2Uc\zeta_b \cos \theta \sin \phi}{b^2+c^2} \\ \frac{U(b^2-c^2)\cos \theta}{b^2+c^2} + \frac{2Uc\zeta_b \sin \theta}{b^2+c^2} \\ \frac{2Uc\xi_b \sin \phi}{b^2+c^2} + \frac{U(b^2-c^2)\sin \theta \cos \phi}{b^2+c^2} - \frac{2Uc\zeta_b \cos \theta \cos \phi}{b^2+c^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

À ce moment-là, il nous suffit d'égaliser ces composantes à celles données en (4.20) du vecteur \vec{U}' . Nous commençons par lier les deuxièmes composantes des deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
U \cos \theta' &= \frac{U(b^2-c^2)\cos \theta + 2Uc\zeta_b \sin \theta}{b^2+c^2} \\
\Rightarrow \cos \theta' &= \frac{(b^2-c^2)\cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta}{b^2+c^2}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons, grâce à la formule fondamentale de trigonométrie et au détail des calculs réalisés à l'annexe B.5, l'expression du sinus de la nouvelle variable θ' .

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{[(b^2-c^2)\sin \theta - 2c\zeta_b \cos \theta]^2 + 4c^2\xi_b^2}}{b^2+c^2}.$$

Nous passons ensuite à l'égalité entre les premières composantes des deux vecteurs pour déterminer l'expression du sinus de ϕ' .

$$\begin{aligned}
U \sin \theta' \sin \phi' &= \frac{-2Uc\xi_b \cos \phi + U(b^2-c^2)\sin \theta \sin \phi - 2Uc\zeta_b \cos \theta \sin \phi}{b^2+c^2} \\
\Rightarrow \sin \phi' &= \frac{[(b^2-c^2)\sin \theta - 2c\zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c\xi_b \cos \phi}{(b^2+c^2)\sin \theta'}.
\end{aligned}$$

Et nous terminons par l'expression du cosinus de ϕ' en égalant les troisièmes composantes des deux vecteurs.

$$\begin{aligned}
U \sin \theta' \cos \phi' &= \frac{2Uc\xi_b \sin \phi + U(b^2-c^2)\sin \theta \cos \phi - 2Uc\zeta_b \cos \theta \cos \phi}{b^2+c^2} \\
\Rightarrow \cos \phi' &= \frac{[(b^2-c^2)\sin \theta - 2c\zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c\xi_b \sin \phi}{(b^2+c^2)\sin \theta'}.
\end{aligned}$$

Nous noterons que ce vecteur \vec{U}' nous indique la direction du nouveau mouvement rectiligne du petit corps autour de la planète. Suite au changement instantané de trajectoire, nous savons que le petit corps se déplace le long d'une droite parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole. Dès lors, la direction de cette droite est le vecteur \vec{U}' .

À présent, nous cherchons les expressions des trois dernières variables d'Öpik après le changement de trajectoire. Celui-ci étant instantané, le temps t'_b est identique au temps t_b . Il nous reste donc à déterminer les variables ξ'_b et ζ'_b représentant la position du petit corps dans le nouveau b'-plan. De manière similaire au b-plan, nous prenons ce nouveau b'-plan comme étant le plan contenant la planète, et perpendiculaire à l'asymptote sortante de l'hyperbole. Or, la direction de l'asymptote sortante est celle du vecteur \vec{U}' . Par conséquent, notre nouveau b'-plan, représenté à la FIGURE 4.13, est le plan contenant la planète et de vecteur normal \vec{U}' .

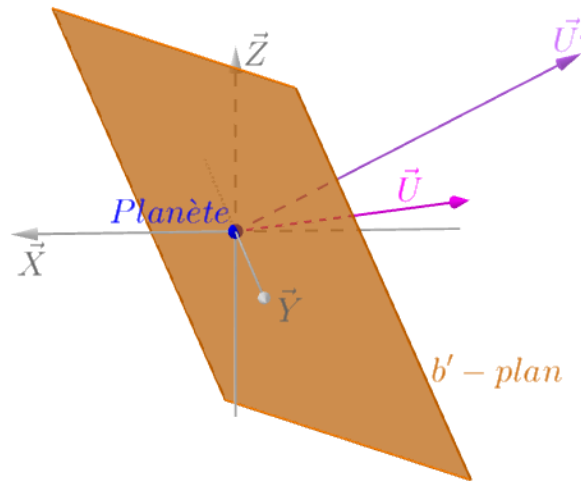


FIGURE 4.13 – Représentation du nouveau b'-plan contenant la planète et de vecteur normal \vec{U}' dans le repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} .

De la même manière que pour le b-plan, nous pouvons associer un référentiel au b'-plan tel que le premier et troisième axes de ce référentiel soient dans le b'-plan et le deuxième axe soit perpendiculaire au b'-plan. Or, le vecteur \vec{U}' étant le vecteur normal du b'-plan, nous plaçons donc le deuxième axe de notre nouveau repère sur ce vecteur \vec{U}' . En suivant la même démarche de construction que pour le repère lié au b-plan, nous effectuons, sur le repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} , une rotation de l'angle ϕ' autour du deuxième axe suivi d'une rotation de l'angle θ' autour du premier axe. Nous obtenons ainsi notre nouveau repère, noté $\vec{\xi}'$ - $\vec{\eta}'$ - $\vec{\zeta}'$, et représenté à la FIGURE 4.14.

Pour déterminer les variables d'Öpik ξ'_b et ζ'_b , nous devons trouver les composantes du vecteur position du petit corps lorsqu'il se trouve dans le b'-plan. De plus, ces composantes doivent être exprimées dans le nouveau repère $\vec{\xi}'$ - $\vec{\eta}'$ - $\vec{\zeta}'$. Or, grâce à la matrice de rotation nous indiquant le changement de direction effectué par le vecteur \vec{U} , nous pouvons déterminer la position du petit corps après cette rotation dans le repère lié au b-plan. Ensuite, nous pourrions déterminer où se situe le petit corps après le contournement dans le repère planétocentrique. Enfin, nous utiliserons la relation entre ce repère et le nouveau repère lié au b'-plan pour déterminer la position du petit corps dans ce dernier et pour en déduire les expressions de ξ'_b et ζ'_b .

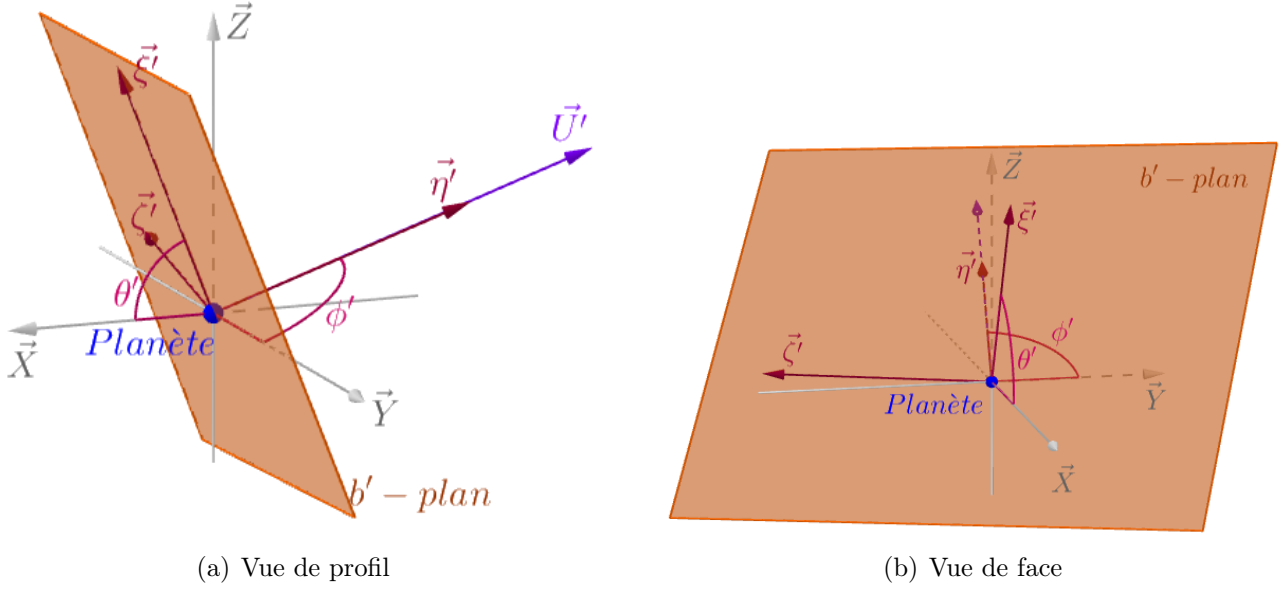


FIGURE 4.14 – Représentation du nouveau repère $\vec{\xi}' - \vec{\eta}' - \vec{\zeta}'$ par rapport au repère $\vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z}$.

Nous commençons donc par déterminer les composantes du vecteur position du petit corps après le changement de trajectoire dans le repère lié au b-plan. Nous appliquons la matrice de rotation (4.18) au vecteur position de ce petit corps avant le changement de direction du mouvement. Nous obtenons alors les composantes du vecteur position après le contournement exprimées dans le même référentiel.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix}^{b-plan} &= R_{\vec{\sigma}_u}(\gamma) \begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta_b \\ \zeta_b \end{pmatrix}^{b-plan} \\
 &= R_{\vec{\sigma}_u}(\gamma) \begin{pmatrix} \xi_b \\ 0 \\ \zeta_b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} [U^2 \zeta_b^2 (1 - \cos \gamma) + \cos \gamma] \xi_b - U^2 \zeta_b^2 \xi_b (1 - \cos \gamma) \\ U \xi_b^2 \sin \gamma + U \zeta_b^2 \sin \gamma \\ -U^2 \zeta_b \xi_b^2 (1 - \cos \gamma) + [U^2 \xi_b^2 (1 - \cos \gamma) + \cos \gamma] \zeta_b \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pour simplifier ces expressions, nous utilisons l'égalité (4.16), établie dans le repère lié au b-plan, et la relation (4.17) entre la norme U et le paramètre d'impact b . Les composantes du vecteur position du petit corps après le contournement dans le repère $\vec{\xi} - \vec{\eta} - \vec{\zeta}$ sont alors

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix}^{b-plan} &= \begin{pmatrix} \xi_b \cos \gamma \\ U b^2 \sin \gamma \\ \zeta_b \cos \gamma \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \xi_b \cos \gamma \\ b \sin \gamma \\ \zeta_b \cos \gamma \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous déterminons les composantes de ce vecteur position dans le repère $\vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z}$ après le changement de trajectoire. Pour cela, nous utilisons les rotations permettant de construire le repère lié au b-plan à partir du référentiel planétocentrique. En suivant le détail des calculs à

l'annexe B.6, les composantes du vecteur position dans le repère planétocentrique, notées x'_b , y'_b et z'_b , sont

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = R_2(\phi) R_1(\theta) \begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix}^{b-plan}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2} \\ \frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \\ \frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2} \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous exprimons les composantes de la position du petit corps après le contournement dans le référentiel lié au nouveau b'-plan. Pour ce faire, nous multiplions les composantes x'_b , y'_b et z'_b par les matrices de rotation représentant le passage du référentiel planétocentrique au nouveau repère lié au b'-plan. Grâce aux simplifications détaillées dans l'annexe B.7, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix}^{b'-plan} = R_1(-\theta') R_2(-\phi') \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\xi_b \sin \theta}{\sin \theta'} \\ 0 \\ \frac{(b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta - 2b^2 c \cos \theta}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \end{pmatrix}.$$

Nous connaissons à présent les nouvelles expressions des variables d'Öpik, U , θ' , ϕ' , ξ'_b , ζ'_b et t_b , suite au changement de direction du mouvement rectiligne du petit corps autour de la planète. Leurs expressions sont reprises ci-dessous.

$$\begin{aligned} U' &= U \\ \cos \theta' &= \frac{(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \\ \sin \theta' &= \frac{\sqrt{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta]^2 + 4c^2 \xi_b^2}}{b^2 + c^2} \\ \cos \phi' &= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \\ \sin \phi' &= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \\ \xi'_b &= \frac{\xi_b \sin \theta}{\sin \theta'} \\ \zeta'_b &= \frac{(b^2 - c^2) \zeta_b \sin \theta - 2b^2 c \cos \theta}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \\ t'_b &= t_b \end{aligned} \quad (4.22)$$

où $c = \frac{m_p}{U^2}$.

Grâce à ces nouvelles variables d'Öpik, nous déterminons aussi l'expression du mouvement rectiligne du petit corps le long de la droite parallèle à l'asymptote sortante de l'hyperbole. Nous savons que cette droite possède le vecteur \vec{U}' comme direction. De plus, le petit corps débute son mouvement sur cette droite après avoir changé instantanément de trajectoire. La condition initiale de son mouvement est alors la position $(x'_b \ y'_b \ z'_b)^T$ du petit corps, et son expression est

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \sin \theta' \sin \phi'(t - t_b) + x'_b \\ U \cos \theta'(t - t_b) + y'_b \\ U \sin \theta' \cos \phi'(t - t_b) + z'_b \end{pmatrix}.$$

4.7 La nouvelle orbite du petit corps après le contournement

Dans ce dernier point, nous déterminons, grâce aux nouvelles variables d'Öpik, les nouveaux éléments orbitaux du petit corps à la suite de son contournement avec la planète. Nous nous basons dès lors sur les expressions entre les variables d'Öpik et les éléments orbitaux déterminées, dans ce chapitre, avant l'étude du changement instantané de trajectoire du petit corps. Ces relations sont construites pour déterminer les variables d'Öpik sur base des éléments orbitaux. Ici, nous allons inverser ces relations pour déterminer les éléments orbitaux en fonction des nouvelles variables d'Öpik. Cette inversion est possible grâce au fait que la théorie d'Öpik est analytique.

Nous commençons par déterminer les expressions du demi-grand axe a' , de l'excentricité e' et de l'inclinaison i' sur base des nouvelles variables d'Öpik. Nous allons travailler en deux temps : le premier va lier les éléments orbitaux après le contournement aux coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{U}' ; le deuxième liera ces coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques du vecteur \vec{U}' . Nous pourrons alors exprimer les coordonnées sphériques du vecteur \vec{U}' en fonction des nouveaux éléments orbitaux et en déduire l'expression de chacun d'entre eux.

Premièrement, pour lier les coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{U}' aux éléments orbitaux, nous reprenons ce qui a été fait dans l'annexe A et nous l'appliquons aux éléments après le contournement. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{U}' &= \begin{pmatrix} U'_x \\ U'_y \\ U'_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{a'} - a'(1 - e'^2)} \\ \sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i' - 1 \\ \sqrt{a'(1 - e'^2)} \sin i' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'expression de la norme de ce vecteur est alors

$$\begin{aligned} \|\vec{U}'\| &= \sqrt{3 - \frac{1}{a'} - 2\sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i'} \\ &= \sqrt{3 - T} \end{aligned}$$

où T désigne le paramètre de Tisserand qui reste invariant lors du contournement de la planète par le petit corps.

Deuxièmement, le vecteur \vec{U}' , exprimé selon ses coordonnées sphériques, est

$$\vec{U}' = \begin{pmatrix} U \sin \theta' \sin \phi' \\ U \cos \theta' \\ U \sin \theta' \cos \phi' \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, nous pouvons exprimer les coordonnées sphériques en fonction des nouveaux éléments orbitaux comme

$$\begin{cases} U \sin \theta' \sin \phi' &= \pm \sqrt{2 - \frac{1}{a'} - a'(1 - e'^2)} \\ U \cos \theta' &= \sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i' - 1 \\ U \sin \theta' \cos \phi' &= \sqrt{a'(1 - e'^2)} \sin i'. \end{cases} \quad (4.23)$$

Nous en déduisons alors les expressions de a' , e' et i' .

Pour trouver l'expression du nouveau demi-grand axe de l'orbite du petit corps, nous utilisons la deuxième relation de (4.23) et l'expression de la norme du vecteur \vec{U}' . En appliquant de manière similaire le détail des calculs de l'annexe B.1, nous obtenons la relation suivante entre la variable d'Öpik θ' et le demi-grand axe a' .

$$\cos \theta' = \frac{1 - \frac{1}{a'} - U^2}{2U}. \quad (4.24)$$

En isolant l'inconnue a' , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{a'} &= 1 - U^2 - 2U \cos \theta' \\ \Leftrightarrow a' &= \frac{1}{1 - U^2 - 2U \cos \theta'}. \end{aligned}$$

L'expression du carré de l'excentricité de la nouvelle orbite du petit corps est obtenue grâce à la première relation de (4.23).

$$\begin{aligned} U^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' &= 2 - \frac{1}{a'} - a'(1 - e'^2) \\ \Leftrightarrow a'(1 - e'^2) &= 2 - \frac{1}{a'} - U^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' \\ \Leftrightarrow e'^2 &= 1 - \frac{2}{a'} + \frac{1}{a'^2} + \frac{U^2}{a'} \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' \\ \Leftrightarrow e'^2 &= \left(1 - \frac{1}{a'}\right)^2 + \frac{U^2}{a'} \sin^2 \theta' \sin^2 \phi'. \end{aligned}$$

En remplaçant a' par son expression trouvée précédemment, nous obtenons l'expression de l'excentricité e' .

$$\begin{aligned} e'^2 &= (U^2 + 2U \cos \theta')^2 + U^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' (1 - U^2 - 2U \cos \theta') \\ &= U^2 [(U + 2 \cos \theta')^2 + \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' (1 - U^2 - 2U \cos \theta')] \\ \Rightarrow e' &= U \sqrt{(U + 2 \cos \theta')^2 + \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' (1 - U^2 - 2U \cos \theta')}. \end{aligned}$$

Connaissant à présent les expressions du demi-grand axe et de l'excentricité de la nouvelle orbite du petit corps, nous déduisons de la deuxième relation de (4.23) l'expression du cosinus de l'inclinaison de cette orbite.

$$\begin{aligned} U \cos \theta' &= \sqrt{a'(1 - e'^2)} \cos i' - 1 \\ \Leftrightarrow \cos i' &= \frac{U \cos \theta' + 1}{\sqrt{a'(1 - e'^2)}}. \end{aligned}$$

Or, grâce aux développements déterminant l'excentricité et à l'expression du demi-grand axe a' , nous avons

$$\begin{aligned} a'(1 - e'^2) &= 2 - \frac{1}{a'} - U^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' \\ &= 2 - 1 + U^2 + 2U \cos \theta' - U^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' \\ &= 1 + U^2(1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi') + 2U \cos \theta'. \end{aligned}$$

Dès lors, l'expression de l'inclinaison de la nouvelle orbite du petit corps est

$$i' = \arccos \left(\frac{1 + U \cos \theta'}{\sqrt{1 + U^2(1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi') + 2U \cos \theta'}} \right).$$

Nous poursuivons en déterminant les expressions des éléments suivants de la nouvelle orbite du petit corps : l'argument du périhélie ω' , la longitude du nœuds ascendants Ω' , et l'anomalie vraie f'_b au temps t_b . Nous travaillons également en deux temps. Nous partirons d'abord des nouvelles variables d'Öpik pour obtenir le vecteur position du petit corps au temps t_b après le contournement dans le repère planétocentrique. Ensuite, nous lierons les composantes de ce vecteur aux éléments orbitaux après la rencontre. Nous utiliserons la même relation que celle établie en (4.7) entre la position du corps au temps t_0 et les éléments orbitaux avant le contournement. En effet, avant le contournement, celle-ci représente la position initiale du mouvement rectiligne du petit corps dans la sphère d'influence. Après le contournement, la position initiale du mouvement rectiligne est la position du corps au temps t_b . De plus, nous restons toujours dans la sphère d'influence. Dès lors, les hypothèses utilisées pour établir la relation (4.7) sont vérifiées au temps t_b .

Premièrement, nous exprimons la position du petit corps $(x'_b \ y'_b \ z'_b)^T$ au temps t_b en fonction de celle $(\xi'_b \ 0 \ \zeta'_b)^T$. Pour ce faire, il nous suffit d'utiliser les matrices de rotation permettant de passer du repère planétocentrique au repère lié au b'-plan. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} &= R_2(\phi') R_1(\theta') \begin{pmatrix} \xi'_b \\ 0 \\ \zeta'_b \end{pmatrix} \\ &= R_2(\phi') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & -\sin \theta' \\ 0 & \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_b \\ 0 \\ \zeta'_b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi' & 0 & \sin \phi' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi' & 0 & \cos \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_b \\ -\zeta'_b \sin \theta' \\ \zeta'_b \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi'_b \cos \phi' + \zeta'_b \cos \theta' \sin \phi' \\ -\zeta'_b \sin \theta' \\ -\xi'_b \sin \phi' + \zeta'_b \cos \theta' \cos \phi' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, nous déterminons le lien entre les composantes du vecteur position $(x'_b \ y'_b \ z'_b)^T$ du petit corps et ses éléments orbitaux après la rencontre. En appliquant la relation (4.7), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos f'_b} - 1 \\ \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos f'_b} [\Omega' + \arctan(\cos i' \tan(\omega' + f'_b)) - \lambda_p] \\ \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos f'_b} \sin(\omega' + f'_b) \sin i' \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où f'_b représente l'anomalie vraie au temps t_b après la rencontre.

Nous pouvons ainsi obtenir les trois éléments orbitaux ω' , Ω' et f'_b sur base des composantes x'_b , y'_b et z'_b , qui sont à présent connues, et des nouveaux éléments orbitaux a' , e' et i' connus. Nous commençons par déterminer l'expression du cosinus et du sinus de la nouvelle anomalie vraie au temps t_b à l'aide de la relation liant les premières composantes de (4.25). Le cosinus de f'_b est

$$\begin{aligned} (1 + e' \cos f'_b)(x'_b + 1) &= a'(1 - e'^2) \\ \Leftrightarrow 1 + e' \cos f'_b &= \frac{a'(1 - e'^2)}{x'_b + 1} \\ \Leftrightarrow \cos f'_b &= \frac{a'(1 - e'^2)}{e'(x'_b + 1)} - \frac{1}{e'} \\ \Leftrightarrow \cos f'_b &= \frac{a'(1 - e'^2) - (x'_b + 1)}{e'(x'_b + 1)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire le sinus de f'_b en utilisant la formule fondamentale de trigonométrie. Celui-ci est

$$\sin f'_b = \pm \sqrt{1 - \cos^2 f'_b}.$$

Le signe du sinus de l'anomalie vraie au temps t_b après la rencontre dépend de la position du petit corps par rapport au périhélie de son orbite. En suivant la même réflexion faite pour établir la TABLE 4.1, nous déduisons que le signe du sinus de f'_b est positif lorsque celui du sinus de la variable d'Öpik ϕ' est également positif, et inversement. Dès lors, l'expression du sinus de l'anomalie vraie au temps t_b après la rencontre est déterminée grâce à la relation

$$\sin f'_b = \frac{\sin \phi'}{|\sin \phi'|} \sqrt{1 - \cos^2 f'_b}.$$

Ensuite, nous utilisons la relation entre les troisièmes composantes de (4.25) pour trouver l'expression du cosinus et du sinus de $\omega' + f'_b$ où f'_b est connu. Nous obtenons

$$\begin{aligned} z'_b &= \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos f'_b} \sin(\omega' + f'_b) \sin i' \\ \Leftrightarrow \sin(\omega' + f'_b) &= \frac{z'_b(1 + e' \cos f'_b)}{a'(1 - e'^2) \sin i'}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule fondamentale trigonométrique, nous obtenons l'expression du cosinus de la somme entre le nouvel argument du périhélie et la nouvelle anomalie vraie.

$$\cos(\omega' + f'_b) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\omega' + f'_b)}.$$

L'endroit où se produit le changement instantané de trajectoire du petit corps nous permet de déterminer le signe de ce cosinus. De la même manière que pour le sinus de l'anomalie vraie au temps t_b après la rencontre, nous suivons la réflexion faite lors de la réalisation de la TABLE 4.1. Nous en déduisons que le cosinus de $\omega' + f'_b$ est positif lorsque le signe du cosinus de la variable d'Öpik ϕ' est positif, et inversement. De ce fait, la relation suivante détermine l'expression du cosinus de la somme entre le nouvel argument du périhélie et la nouvelle anomalie vraie.

$$\cos(\omega' + f'_b) = \frac{\cos \phi'}{|\cos \phi'|} \sqrt{1 - \sin^2(\omega' + f'_b)}.$$

Enfin, la relation entre les deuxièmes composantes de (4.25) nous permet d'obtenir l'expression de la longitude du nœud ascendant.

$$\begin{aligned} y'_b &= \frac{a'(1 - e'^2)}{1 + e' \cos f'_b} [\Omega' + \arctan(\cos i' \tan(\omega' + f'_b)) - \lambda_p] \\ \Leftrightarrow \frac{1 + e' \cos f'_b}{a'(1 - e'^2)} y'_b &= \Omega' + \arctan(\cos i' \tan(\omega' + f'_b)) - \lambda_p \\ \Leftrightarrow \Omega' &= \lambda_p - \arctan(\cos i' \tan(\omega' + f'_b)) + \frac{1 + e' \cos f'_b}{a'(1 - e'^2)} y'_b. \end{aligned}$$

Nous reprenons, ci-dessous, l'ensemble des expressions des nouveaux éléments orbitaux du petit corps en fonction des nouvelles variables d'Öpik et de la position du petit corps au temps t_b après le contournement dans le repère planétocentrique.

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{1 - U^2 - 2U \cos \theta'} \\ e' &= U \sqrt{(U + 2 \cos \theta')^2 + \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' (1 - U^2 - 2U \cos \theta')} \\ i' &= \arccos \left(\frac{1 + U \cos \theta'}{1 + U^2(1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \phi') + 2U \cos \theta'} \right) \\ \cos f'_b &= \frac{a'(1 - e'^2) - (x'_b + 1)}{e'(x'_b + 1)} \\ \sin f'_b &= \frac{\sin \phi'}{|\sin \phi'|} \sqrt{1 - \cos^2 f'_b} \\ \sin(\omega' + f'_b) &= \frac{z'_b(1 + e' \cos f'_b)}{a'(1 - e'^2) \sin i'} \\ \cos(\omega' + f'_b) &= \frac{\cos \phi'}{|\cos \phi'|} \sqrt{1 - \sin^2(\omega' + f'_b)} \\ \Omega' &= \lambda_p - \arctan(\cos i' \tan(\omega' + f'_b)) + \frac{1 + e' \cos f'_b}{a'(1 - e'^2)} y'_b \end{aligned} \tag{4.26}$$

où

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi'_b \cos \phi' + \zeta'_b \cos \theta' \sin \phi' \\ -\zeta'_b \sin \theta' \\ -\xi'_b \sin \phi' + \zeta'_b \cos \theta' \cos \phi' \end{pmatrix}.$$

Chapitre 5

L'extension de la théorie d'Öpik

L'extension de la théorie d'Öpik consiste à utiliser cette théorie dans un tout autre objectif. Celui-ci est de déterminer les conditions pour lesquelles le petit corps posséderait une certaine orbite souhaitée après son rapprochement avec la planète. En effet, nous allons retravailler la théorie d'Öpik afin de déterminer comment doit être l'orbite du petit corps avant la rencontre pour qu'elle devienne celle souhaitée après la rencontre. Sur base de cette extension présentée par G.B. Valsecchi et al. en 2000 [19] et en 2015 [17], deux cas de figures seront présentés. La première section contient le premier cas. Il consiste à souhaiter une certaine valeur pour le nouveau demi-grand axe de l'orbite du petit corps. Avec cette seule information, nous ne réussirons pas à déterminer exactement l'orbite du petit corps avant la rencontre. Nous le ferons dans la présentation du deuxième cas où nous souhaitons une certaine valeur pour le nouveau demi-grand axe ainsi que pour la nouvelle excentricité ou la nouvelle inclinaison.

5.1 Les conditions donnant l'élément orbital a'_* souhaité

Dans cette première partie, nous déterminons les conditions pour lesquelles l'orbite du petit corps obtiendrait, après la rencontre, une certaine valeur souhaitée pour le demi-grand axe. Nous choisissons cette valeur comme étant a'_* . Pour obtenir ces conditions, nous supposons que le demi-grand axe a , l'excentricité e ainsi que l'inclinaison i de l'orbite du petit corps, avant la rencontre, sont connus. Nous utilisons alors la construction de la théorie d'Öpik réalisée au chapitre 4 en inversant son sens. En effet, dans ce dernier chapitre, nous sommes partis des éléments orbitaux du petit corps avant la rencontre pour déterminer ceux après la rencontre, en passant par les variables d'Öpik. À présent, nous nous basons sur la valeur souhaitée a'_* afin de déterminer des informations sur le mouvement du corps avant la rencontre. Nous travaillerons également avec ces variables d'Öpik.

Grâce à la valeur de a'_* , nous sommes en mesure de déterminer celle de la variable d'Öpik θ'_* après la rencontre. Nous utilisons la relation (4.24) liant les variables d'Öpik aux éléments orbitaux dans le repère planétocentrique. En particulier pour la valeur a'_* , nous obtenons

$$\cos \theta'_* = \frac{1 - \frac{1}{a'_*} - U^2}{2U}. \quad (5.1)$$

La valeur de la norme U est connue puisqu'elle dépend des éléments orbitaux a , e et i supposés connus.

À présent, nous travaillons avec cette variable d'Öpik θ'_* . Connaissant la valeur de son cosinus, nous en déduisons deux informations. La première concerne la position du vecteur vitesse \vec{U}' du petit corps dans le repère planétocentrique \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} . En effet, la variable θ'_* désigne l'angle entre le deuxième axe du repère planétocentrique et le vecteur \vec{U}' . Elle représente également une des coordonnées sphériques particulières du vecteur \vec{U}' . Nous avons, grâce à la relation (4.11), lié ces coordonnées sphériques particulières du vecteur \vec{U} à ses coordonnées cartésiennes. Nous pouvons faire de même pour les deux jeux de coordonnées du vecteur \vec{U}' . Nous obtenons alors

$$\begin{cases} U'_x = U \sin \theta'_* \sin \phi' \\ U'_y = U \cos \theta'_* \\ U'_z = U \sin \theta'_* \cos \phi' \end{cases}$$

où les variables U et θ'_* sont connues, contrairement à la variable ϕ' . Dès lors, la seconde composante cartésienne du vecteur \vec{U}' est la seule composante connue. Nous la notons \vec{U}'_{y*} . Le vecteur vitesse \vec{U}' se situe alors dans une zone particulière de l'espace étant donné que sa seconde composante cartésienne possède la valeur de \vec{U}'_{y*} . Plus particulièrement, une de ses extrémités doit se situer sur un cercle perpendiculaire à l'axe \vec{Y} , d'ouverture l'angle θ'_* . L'autre extrémité se trouve sur le centre du repère planétocentrique. Un exemple de deux positions possibles pour le vecteur \vec{U}' est représenté à la FIGURE 5.1 où la valeur de a'_* est choisie de manière à ce que celle du cosinus de θ'_* soit positive. Nous remarquons également que le cercle perpendiculaire à l'axe \vec{Y} est représenté en orange.

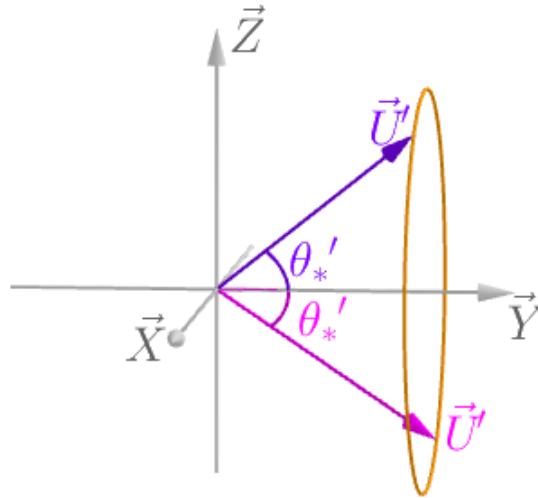


FIGURE 5.1 – Représentation du cercle orange contenant les extrémités des vecteurs possédant une deuxième composante égale à U'_{y*} .

La deuxième information que nous pouvons obtenir de la connaissance de la valeur du cosinus de θ'_* est l'utilisation de la relation entre les variables d'Öpik avant la rencontre et celles après la rencontre, établie en (4.22) dans la partie concernant le changement instantané de trajectoire dans le chapitre 4. Plus particulièrement, nous utilisons la relation liant le cosinus de la variable θ' aux variables d'Öpik avant la rencontre. Cette relation, écrite pour déterminer θ'_* , est

$$\cos \theta'_* = \frac{(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2}. \quad (5.2)$$

Nous allons alors utiliser cette relation afin de déterminer les variables d'Öpik avant le contournement de la planète par le petit corps. Dans celle-ci, nous connaissons déjà les valeurs du cosinus et du sinus de θ grâce aux relations (4.13) les liant aux éléments orbitaux connus avant la rencontre. La quantité c représente le quotient entre la masse de la planète et le carré de la norme du vecteur vitesse du petit corps. Ces deux quantités sont connues. Nous savons également que le paramètre d'impact b est relié aux deux variables d'Öpik ξ_b et ζ_b par

$$\xi_b^2 + \zeta_b^2 = b^2. \quad (5.3)$$

Dès lors, ces deux dernières variables sont nos seules inconnues dans l'équation. Nous allons tenter de les déterminer en retravaillant l'équation (5.2). Tout d'abord, nous y remplaçons le carré du paramètre d'impact par le membre de gauche de la relation (5.3).

$$\begin{aligned} \cos \theta'_* &= \frac{(\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta}{\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow (\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) \cos \theta'_* &= (\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta \\ \Leftrightarrow (\xi_b^2 + \zeta_b^2)(\cos \theta'_* - \cos \theta) - 2c \zeta_b \sin \theta &= -c^2(\cos \theta + \cos \theta'_*) \\ \Leftrightarrow \xi_b^2 + \zeta_b^2 - \frac{2c \zeta_b \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} + \frac{c^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} &= -\frac{c^2(\cos \theta'_* + \cos \theta)}{\cos \theta'_* - \cos \theta} + \frac{c^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons poser $D = \frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta}$. De cette manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi_b^2 + (\zeta_b - D)^2 &= \frac{c^2 [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta'_* + \cos^2 \theta]}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \\ \Leftrightarrow \xi_b^2 + (\zeta_b - D)^2 &= \frac{c^2 \sin^2 \theta'_*}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons encore écrire cette égalité comme

$$\xi_b^2 + (\zeta_b - D)^2 = R^2 \quad (5.4)$$

où

$$\begin{aligned} D &= \frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \\ R &= \left| \frac{c \sin \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right|. \end{aligned}$$

Cette égalité représente l'équation d'un cercle de centre $(0, D)$ et de rayon R dans le b-plan. De ce faite, le petit corps doit se trouver sur ce cercle dans le b-plan, avant la rencontre, pour avoir un demi-grand axe de valeur a'_* après celle-ci.

Nous pourrions essayer de déterminer les éléments orbitaux angulaires du petit corps avant la rencontre grâce à ces variables d'Öpik. Malheureusement, les deux variables d'Öpik ζ_b et ξ_b sont liées l'une à l'autre. Il est donc difficile d'établir les valeurs exactes que posséderaient les éléments orbitaux angulaires avant la rencontre. Dans cette partie, les conditions permettant au petit corps d'avoir une orbite de demi-grand axe a'_* après la rencontre se limitent à la vérification de l'équation (5.4).

5.2 Les conditions donnant les valeurs a'_* , e'_* et i'_* souhaitées

À présent, nous donnons un peu plus d'indication sur l'orbite souhaitée après la rencontre. Nous supposons toujours que les valeurs du demi-grand axe a , de l'excentricité e et de l'inclinaison i avant la rencontre sont connues. Nous ajoutons alors, à la valeur a'_* désirée, celle de l'excentricité souhaitée, notée e'_* ou celle de l'inclinaison souhaitée, notée i'_* . En connaissant deux de ces trois dernières valeurs, nous pouvons en déduire la troisième. En effet, grâce à la relation dite de Tisserand (4.10), liant les trois premiers éléments orbitaux avant le contournement aux trois éléments orbitaux après celui-ci, la connaissance de a , e , i , a'_* et e'_* , par exemple, nous permet de déterminer la valeur de i'_* . Enfin, nous supposons l'endroit de la rencontre également connu. Elle se produit soit proche du nœud ascendant, soit proche du nœud descendant et le petit corps se situe soit sur la branche pré-périhélie de son orbite, soit sur sa branche post-périhélie.

Grâce à ces informations supplémentaires, nous pouvons connaître les valeurs des variables d'Öpik θ'_* et ϕ'_* . En suivant la même démarche que celle présentée au point précédent, nous utilisons les expressions liant le cosinus de θ , le sinus de ϕ et le cosinus de ϕ aux éléments orbitaux données en (4.13). En les appliquant pour les valeurs a'_* , e'_* et i'_* , nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos \theta'_* &= \frac{1 - U^2 - \frac{1}{a'_*}}{2U} \\ \sin \phi'_* &= \pm \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{a'_*} - a'_*(1 - e'^2_*)}}{U \sin \theta'_*} \\ \cos \phi'_* &= \pm \frac{\sqrt{a'_*(1 - e'_*)} \sin i'_*}{U \sin \theta'_*}\end{aligned}$$

où les signes du cosinus et du sinus de ϕ'_* sont déterminés en fonction de l'endroit de la rencontre. Nous pouvons également déduire deux informations des valeurs du cosinus de θ'_* ainsi que du sinus et du cosinus de ϕ'_* .

Premièrement, la connaissance de la valeur du cosinus de θ'_* nous donne les mêmes informations que celles trouvées au point 5.1. Nous connaissons donc la position du vecteur \vec{U}' dans le repère planétocentrique pour que sa deuxième composante soit égale à U'_{y*} . Nous connaissons également l'équation du cercle (5.4) donnant la position du petit corps dans le b-plan avant le contournement.

Deuxièmement, la connaissance de la valeur du cosinus de θ'_* nous donne la valeur du sinus de cette variable. De plus, la valeur du sinus de ϕ'_* est également déterminée. Le produit $\sin \theta'_* \sin \phi'_*$ est alors connu. Or, cette quantité nous permet de déterminer la valeur de la première composante du vecteur \vec{U}' comme étant U'_{x*} . Nous pouvons donc situer le vecteur \vec{U}' de manière à ce qu'il possède l'une de ses extrémités sur un cercle perpendiculaire à l'axe \vec{X} . L'autre extrémité se situe à l'origine du repère planétocentrique. Un exemple de ce cercle est représenté en rose à la FIGURE 5.2.

Le produit $\sin \theta'_* \cos \phi'_*$ est lui aussi connu. Il nous permet de déterminer la valeur de la troisième composante du vecteur \vec{U}' comme étant U'_{z*} . Celle-ci nous renseigne ainsi sur la position du vecteur vitesse du petit corps dans le repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} . En effet, l'une de ses extrémités doit se situer sur un cercle perpendiculaire au troisième axe du repère, l'autre étant sur l'origine de ce

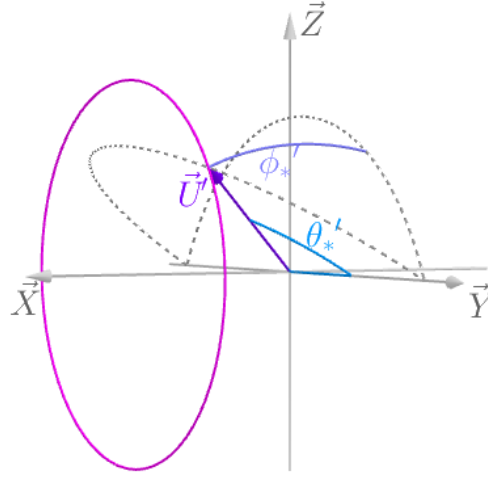


FIGURE 5.2 – Représentation du cercle rose contenant les extrémités des vecteurs possédant une première composante égale à U'_{x*} .

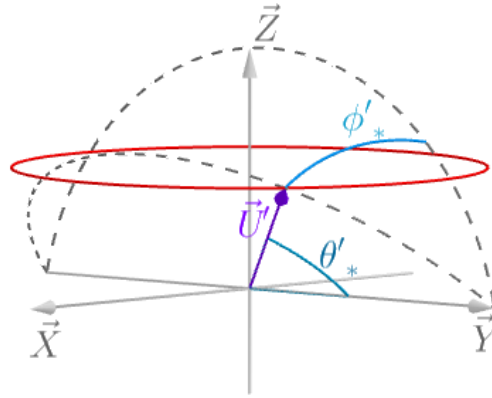


FIGURE 5.3 – Représentation du cercle rouge contenant les extrémités des vecteurs possédant une troisième composante égale à U'_{z*} .

dernier. La FIGURE 5.3 présente un exemple de ce cercle en rouge.

En regroupant la connaissance des trois composantes du vecteur \vec{U}' , ainsi que leur rôle dans la détermination de la position de ce vecteur dans le repère planétocentrique, nous pouvons le situer précisément. En effet, celle-ci se situe à l'intersection des trois cercles respectivement perpendiculaires au premier, deuxième et troisième axe du repère planétocentrique. La FIGURE 5.4 représente cette intersection en reprenant les trois cercles construits aux FIGURES 5.1, 5.2 et 5.3.

Troisièmement, nous pouvons utiliser les relations entre les variables d'Öpik après la rencontre et celles avant la rencontre, données en (4.22). Nous travaillons particulièrement sur la relation liant le sinus et le cosinus de la variable ϕ' aux variables d'Öpik avant la rencontre. Celles-ci, pour

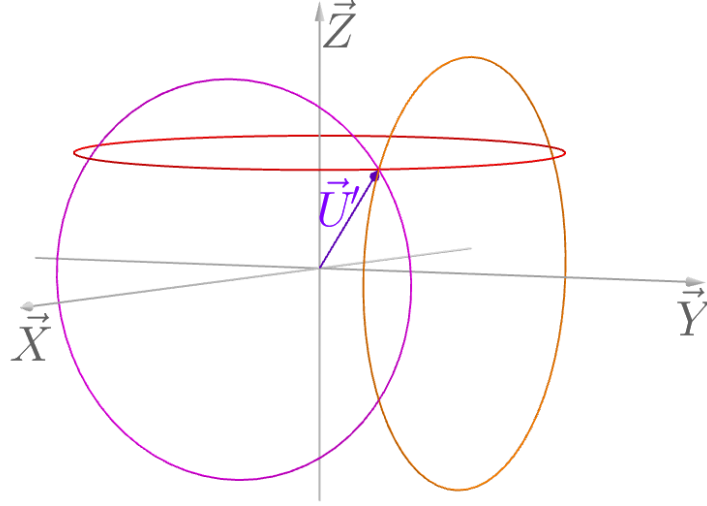


FIGURE 5.4 – Représentation de l'intersection des trois cercles, orange, rose et rouge, contenant les extrémités des vecteurs possédant une première composante égale à U'_{x*} , une deuxième composante égale à U'_{y*} et une troisième composante égale à U'_{z*} .

la variable ϕ'_* , sont

$$\cos \phi'_* = \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'_*} \quad (5.5)$$

$$\sin \phi'_* = \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'_*}. \quad (5.6)$$

Pour les mêmes raisons que celles citées au point 5.1, la quantité c , le cosinus et le sinus des variables θ et ϕ sont connus. Le paramètre d'impact b est toujours lié aux variables d'Öpik ζ_b et ξ_b par la relation (5.3). Ces dernières sont donc, une fois de plus, les seules variables d'Öpik inconnues avant la rencontre. En retravaillant les égalités (5.5) et (5.6), nous allons également trouver des équations de cercle.

Nous commençons par retravailler la relation (5.6). Nous y remplaçons le carré du paramètre d'impact par le membre de gauche de la relation (5.3) et nous notons la quantité $\sin \theta'_* \sin \phi'_*$ comme étant K_{s*} . En suivant le détail des calculs à l'annexe D.1, l'expression de l'équation du cercle en découlant est

$$(\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = R_s^2 \quad (5.7)$$

où

$$\begin{aligned} D_{s1} &= \frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \\ D_{s2} &= \frac{-c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \\ R_s &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{s*}^2}}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right|. \end{aligned}$$

Ensuite, nous remplaçons de la même manière le paramètre d'impact dans la relation (5.5). En nommant la quantité $\sin \theta'_* \cos \phi'_*$ par K_{c*} et en suivant le détail des calculs de l'annexe D.2, l'équation du cercle correspondant possède l'expression

$$(\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = R_c^2 \quad (5.8)$$

où

$$\begin{aligned} D_{c1} &= \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ D_{c2} &= \frac{-c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ R_c &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{c*}^2}}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right|. \end{aligned}$$

À présent, grâce aux trois équations de cercle (5.4), (5.7) et (5.8), nous pouvons déterminer les valeurs exactes des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b . Nous résolvons le système composé de ces trois équations.

$$\begin{cases} \xi_b^2 + (\zeta_b - D)^2 = R^2 \\ (\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = R_s^2 \\ (\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = R_c^2 \end{cases} \quad (5.9)$$

où

$$\begin{aligned} D &= \frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} & D_{s1} &= \frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} & D_{c1} &= \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ R &= \left| \frac{c \sin \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right| & D_{s2} &= \frac{-c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} & D_{c2} &= \frac{-c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ R_s &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{s*}^2}}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right| & R_c &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{c*}^2}}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right|. \end{aligned}$$

En suivant le détail du calcul effectué dans l'annexe D.3, les solutions de ce système d'équation sont

$$\begin{aligned} \xi_{b*} &= \frac{c (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)} \\ \zeta_{b*} &= \frac{c [\sin \theta \cos \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta]}{1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*}. \end{aligned}$$

Dès lors, pour que le petit corps possède une orbite de demi-grand axe a'_* , d'excentricité e'_* et d'inclinaison i'_* après son rapprochement avec la planète, il doit se trouver à la position $(\xi_{b*} \ 0 \ \zeta_{b*})^T$ dans le b-plan avant la rencontre.

Pour terminer, nous allons déterminer les éléments orbitaux angulaires du petit corps avant la rencontre correspondant à ces variables d'Öpik ξ_{b*} et ζ_{b*} . Nous cherchons la position du petit

corps dans le repère héliocentrique correspondant à la position $(\xi_{b*} \ 0 \ \zeta_{b*})^T$ dans le référentiel lié au b-plan. Il nous suffit alors de changer le repère dans lequel nous exprimons cette position. Or, lorsque nous avons construit le repère lié au b-plan, nous nous sommes appuyés sur le référentiel \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} , lui même construit sur base du repère héliocentrique. Nous passerons donc par le repère planétocentrique pour déterminer la position du petit corps dans le repère héliocentrique.

Premièrement, nous exprimons la position du petit corps dans le repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} en passant, grâce au rappel sur le changement de repère de la partie 1.2, du référentiel lié au b-plan à celui-ci. Or, nous savons que, pour passer du repère planétocentrique au référentiel lié au b-plan, nous effectuons une rotation de ϕ autour du deuxième axe et une rotation de θ autour du premier axe. Dès lors, l'expression de notre position devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{b*} \\ y_{b*} \\ z_{b*} \end{pmatrix} &= R_2(\phi) R_1(\theta) \begin{pmatrix} \xi_{b*} \\ 0 \\ \zeta_{b*} \end{pmatrix} \\ &= R_2(\phi) \begin{pmatrix} \xi_{b*} \\ -\zeta_{b*} \sin \theta \\ \zeta_{b*} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_{b*} \cos \phi + \zeta_{b*} \cos \theta \sin \phi \\ -\zeta_{b*} \sin \theta \\ -\xi_{b*} \sin \phi + \zeta_{b*} \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, sur base de ces composantes dans le repère planétocentrique, nous allons déterminer les éléments orbitaux du petit corps dans le repère héliocentrique. Nous utilisons la même démarche que dans la section 4.7 du chapitre 4. En effet, nous avons déterminé, dans les relations (4.26), le lien entre les éléments orbitaux angulaires et les composantes du vecteur position du petit corps dans le repère planétocentrique. Connaissant ces dernières, les éléments orbitaux angulaires en fonction de a , e et i ainsi que des composantes x_{b*} , y_{b*} et z_{b*} sont

$$\begin{aligned} \cos f_{b*} &= \frac{a(1 - e^2) - (x_{b*} + 1)}{e(x_{b*} + 1)} \\ \sin f_{b*} &= \frac{\sin \phi}{|\sin \phi|} \sqrt{1 - \cos^2 f_{b*}} \\ \sin(\omega_{b*} + f_{b*}) &= \frac{z_{b*}(1 + e \cos f_{b*})}{a(1 - e^2) \sin i} \\ \cos(\omega_{b*} + f_{b*}) &= \frac{\cos \phi}{|\cos \phi|} \sqrt{1 - \sin^2(\omega_{b*} + f_{b*})} \\ \Omega_{b*} &= \lambda_p - \arctan(\cos i \tan(\omega_{b*} + f_{b*})) + \frac{1 + e \cos f_{b*}}{a(1 - e^2)} y_{b*}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que le petit corps possède une orbite de demi-grand axe a'_* , d'excentricité e'_* et d'inclinaison i'_* après le contournement de la planète, il doit posséder, avant ce contournement, une orbite dont les éléments orbitaux sont a , e , i , ω_{b*} , Ω_{b*} et f_{b*} .

Chapitre 6

Les applications

Nous terminons notre étude de la théorie d'Öpik et de ses extensions par deux applications issues de l'article de G.B. Valsecchi et al. [17]. Ces applications ont été effectuées grâce à une série d'implémentations construites dans le logiciel de calcul *Matlab*®¹. Nous commençons par reproduire les applications proposées par G.B. Valsecchi et al. dans [17] pour tester l'extension de la théorie d'Öpik. Nous présentons nos résultats dans la première et la deuxième parties de ce chapitre. Ensuite, dans le troisième point, nous utilisons la deuxième application pour tester notre théorie d'Öpik et tenter d'établir un algorithme général applicable à différents cas de contournement. Malheureusement, nous verrons que l'ensemble des données concernant cette application présentées dans l'article de référence de G.B. Valsecchi et al., [17], ne nous permet pas d'aboutir à cet algorithme général.

6.1 Le contournement de la Terre par l'astéroïde (99942) Apophis

Nous commençons par appliquer, comme proposé dans l'article de référence de G.B. Valsecchi et al. [17], l'extension de notre théorie d'Öpik, présentée dans le chapitre 5, sur l'exemple de l'approche entre l'astéroïde Apophis et la Terre en 2029. En effet, le 13 avril 2029, il est prévu, selon le CNES [4] et l'ESA [6], que l'astéroïde géocroiseur² Apophis s'approche de la Terre à moins de 36 000 kilomètres. Il serait donc plus proche de la Terre que les objets célestes se situant sur l'orbite géostationnaire. Actuellement, l'orbite héliocentrique de l'astéroïde possède un demi-grand axe inférieur à 1 unité astronomique. Cependant, suite à son passage près de la Terre, Apophis verra son orbite changer. Entre autres, son demi-grand axe prendra une valeur supérieure à 1 unité astronomique. Nous prendrons alors ce changement d'orbite, survenant suite au contournement de la Terre par l'astéroïde Apophis, comme cas d'étude de l'extension de la théorie d'Öpik. Nous considérerons que le Soleil joue son propre rôle, que la planète est représentée par la Terre et que le petit corps est l'astéroïde Apophis.

Nous connaissons, grâce aux données issues de NEODys, [14], une partie des éléments orbitaux de l'astéroïde avant le contournement. En effet, son demi-grand axe vaut 0.922609 unité astronomique (u.a.), son excentricité a la valeur de 0.191513 et son inclinaison est de 3.337° . Nous visons également un demi-grand axe de valeur supérieure à 1 unité astronomique pour la nouvelle orbite de l'astéroïde. Nous allons alors, dans un premier temps, fixer la valeur souhaitée du demi-grand

1. Nous avons utilisé la version 2013 de ce logiciel.

2. L'orbite héliocentrique d'Apophis croise celle de la Terre.

axe après le contournement à 1 unité astronomique. Avec ces différentes valeurs, nous pouvons tester notre implémentation construite grâce au logiciel de calcul *Matlab*[®] et basée sur la partie théorique présentée au premier point du chapitre 5. Cette implémentation nous permet de calculer les différents éléments repris dans cette partie et de représenter le cercle dont l'équation est donnée dans celle-ci.

Tout d'abord, nous avons calculé les valeurs des variables d'Öpik U et θ'_* après le contournement. La norme U vaut 0.183 et l'angle θ'_* vaut 95.25° . Ensuite, de manière similaire à l'article de référence de G.B. Valsecchi et al. [17], nous avons élaboré le graphique du cercle contenant les différents couples de valeurs possibles pour les variables d'Öpik ξ_b et ζ_b menant à un demi-grand axe de 1 unité astronomique. Celui-ci est représenté à la FIGURE 6.1 où l'unité de longueur est prise comme étant le rayon de la Terre³. Dès lors, pour que l'astéroïde possède un nouveau demi-grand axe de 1 unité astronomique après son rapprochement avec la Terre, il doit se situer sur ce cercle lorsqu'il se trouve dans le b-plan contenant la Terre.

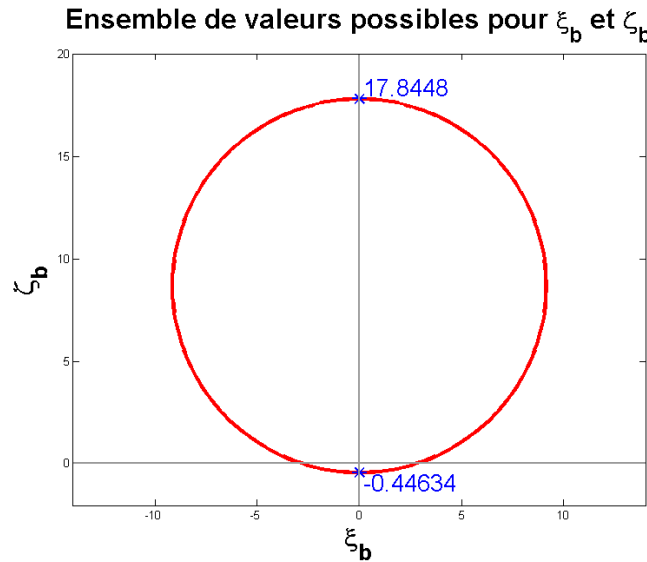


FIGURE 6.1 – Représentation de l'ensemble des couples de valeurs possibles pour les variables d'Öpik ξ_b et ζ_b selon un cercle construit sur base de la connaissance du cosinus de l'angle θ'_* . L'unité de longueur est le rayon de la Terre. Nous repérons également les valeurs extrêmes prises par la variable ζ_b .

Dans un deuxième temps, nous appliquons cette même implémentation pour des valeurs du nouveau demi-grand axe visées plus grandes que 1 unité astronomique. Nous prenons, par exemple, les valeurs de 1,1 et 1,2 unités astronomiques comme valeurs souhaitées du demi-grand axe de la nouvelle orbite de l'astéroïde après le contournement. Pour ces deux valeurs, nous déterminons également les cercles contenant l'ensemble des couples de valeurs possibles pour les variables ξ_b et ζ_b . Ceux-ci sont basés respectivement sur la connaissance du cosinus de θ'_* relative à celle de a'_* valant 1,1 unités astronomiques et sur celle du cosinus de cette même variable relative à un a'_* valant 1,2 unités astronomiques. Ces cercles ainsi que celui de la FIGURE 6.1 sont représentés sur un même graphique à la FIGURE 6.2. Nous remarquons directement que les cercles relatifs

3. Pour connaître les différents paramètres de la Terre, nous avons visité le site de la NASA [12] reprenant les caractéristiques physiques des planètes du Système solaire. Les paramètres du Soleil sont, eux, issus du site de la NASA [13].

à des valeurs de nouveau demi-grand axe supérieures à 1 unité astronomique sont inscrits dans le cercle relatif à un nouveau demi-grand axe de 1 unité astronomique. Nous pouvons donc en conclure que, lorsque l'astéroïde croise le b-plan contenant la Terre, il doit se situer à l'intérieur du cercle rouge de la FIGURE 6.2 afin que sa nouvelle orbite possède un demi-grand axe supérieur à 1 unité astronomique.

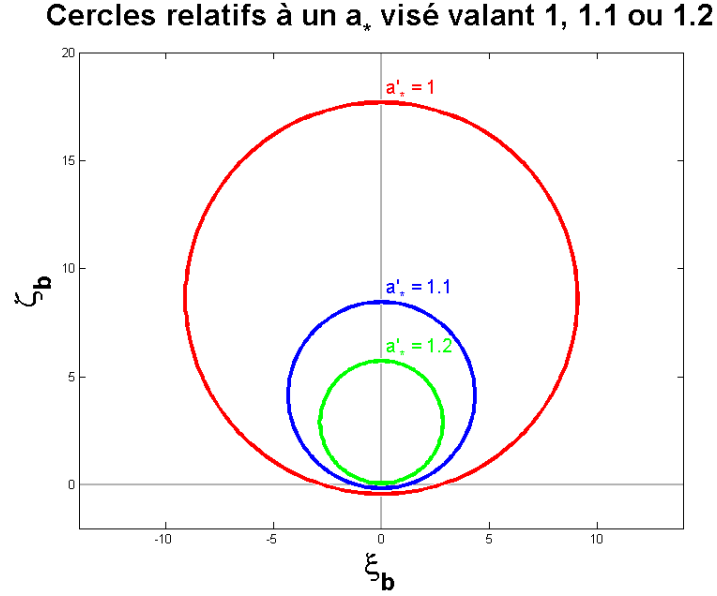


FIGURE 6.2 – Représentation des cercles contenant l'ensemble des couples de valeurs possibles pour les variables d'Öpik ξ_b et ζ_b de l'astéroïde dans le b-plan avant le contournement. Les cercles rouge, bleu et vert sont relatifs à un nouveau demi-grand axe valant respectivement 1 u.a, 1.1 u.a et 1.2 u.a. L'unité de longueur est le rayon de la Terre.

À présent, comme proposé dans l'article de référence de G.B. Valsecchi et al. [17], nous pouvons pousser notre étude plus loin. Nous reprenons le cas d'étude dans lequel nous visions une valeur de 1 unité astronomique pour le nouveau demi-grand axe de l'astéroïde et nous y ajoutons une information concernant le lieu de la rencontre. Cette information nous indique que le contournement se déroule au nœud ascendant de l'orbite de l'astéroïde et que celui-ci est sur sa branche pré-périhélie où l'argument du périhélie est, d'après NEODys [14], de 126.692° .

Dès lors, nous pouvons déterminer, grâce à notre implémentation et sur base de la théorie d'Öpik du chapitre 4, la valeur de la variable d'Öpik ϕ avant la rencontre comme étant de 288.4523° . Nous pouvons également essayer de déterminer la valeur de la variable d'Öpik ϕ' après le contournement. Pour cela, nous avons besoin des valeurs des variables ξ_b et ζ_b . Or, grâce à la FIGURE 6.1, nous savons que toutes les valeurs de ζ_b se trouvent entre -0.44634 unité de longueur et 17.8448 unités de longueur. De plus, grâce à l'équation du cercle représenté sur ce graphique, nous pouvons déduire l'ensemble des valeurs de ξ_b . Ainsi, nous déterminons l'ensemble des valeurs possibles pour la variable d'Öpik ϕ' . Chaque valeur de cette variable peut nous renseigner sur une configuration possible de l'orbite de l'astéroïde juste après son rapprochement avec la Terre. En effet, grâce à la FIGURE 4.8 reprenant les différentes configurations possibles d'un rapprochement entre deux corps selon la valeur de la variable d'Öpik ϕ , nous pouvons faire le lien entre notre variable ϕ' et la configuration post-rencontre de l'orbite de l'astéroïde. Cette configuration nous donnerait le lieu de la rencontre entre la Terre et l'astéroïde si ce dernier possédait une variable d'Öpik ϕ égale à ϕ' .

Chaque couple possible (ξ_b, ζ_b) peut alors déterminer une configuration différente de la position de l'astéroïde sur son orbite juste après le contournement. Cet ensemble de configurations est repris sur la FIGURE 6.3 à l'aide d'un jeu de couleurs. Les couples (ξ_b, ζ_b) représentés en rose indiquent que l'astéroïde sera au nœud ascendant de son orbite après le contournement et qu'il se situera sur sa branche post-périhélie. Ceux de couleur cyan indiquent que l'astéroïde serait plutôt sur sa branche pré-périhélie. Les couples (ξ_b, ζ_b) en bleu désignent que l'astéroïde se trouvera au nœud descendant de sa nouvelle orbite et qu'il sera sur sa branche post-périhélie. En revanche, ceux colorés en rouge nous informent que le petit corps se placera sur sa branche pré-périhélie. Nous remarquons immédiatement qu'il y a de grandes chances pour que l'astéroïde garde une même configuration en restant au nœud ascendant de sa nouvelle orbite et sur sa branche pré-périhélie.

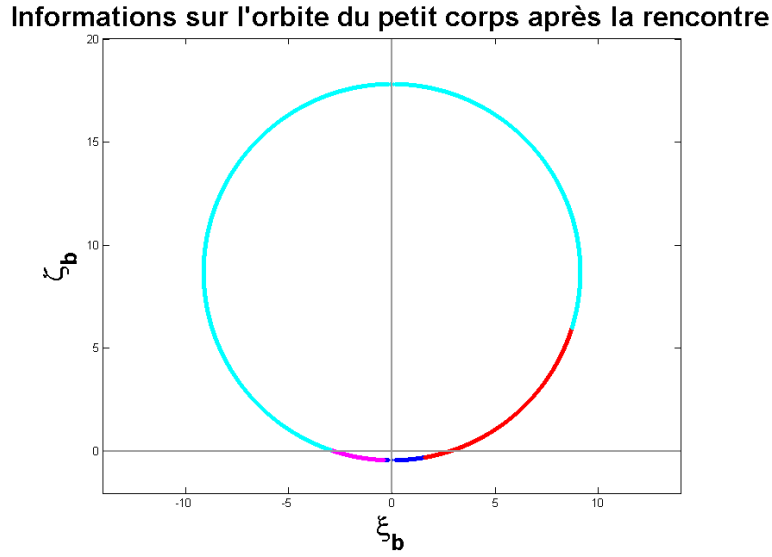


FIGURE 6.3 – Représentation, par un jeu de couleurs (voir texte pour le détail), des différentes configurations de la position de l'astéroïde sur sa nouvelle orbite suite au contournement en fonction des valeurs prises par le couple (ξ_b, ζ_b) . L'unité de longueur est le rayon de la Terre.

6.2 Les contournements de Callisto par la sonde spatiale JUICE

La deuxième application de l'extension de notre théorie d'Öpik proposée par G.B. Valsecchi et al. dans [17] est l'exemple du contournement du satellite naturel de Jupiter, Callisto, par la sonde spatiale de la mission JUICE (JUUpiter ICy moons Explorer). En réalité, selon le CNES [3], le but de cette mission⁴ est d'envoyer, en 2022, une sonde spatiale dans le voisinage de la planète Jupiter afin d'y étudier les caractéristiques de trois de ses satellites naturels : Europe, Ganymède et Callisto. Durant cette étude, centrée notamment sur une première observation détaillée de ces lunes, la sonde spatiale nommée JUICE contournera ces dernières. Suite à ces contournements, l'orbite de la sonde spatiale changera de trajectoire ou d'inclinaison. Elle pourra alors observer le voisinage de la planète Jupiter sous différents points de vue. Plus particulièrement, lors de son observation de la lune Callisto, la sonde JUICE contournera quatre fois cette dernière. En utilisant

4. Cette mission, entièrement européenne, a été sélectionnée dans le cadre du programme Cosmic Vision 2015-2025 par l'Agence spatiale européenne en 2012.

ces quatre contournements, nous avons quatre cas d'étude pour appliquer notre théorie d'Öpik et son extension en suivant ce qui a été fait par G.B. Valsecchi et al. dans [17]. Nous considérons que Jupiter joue le rôle du Soleil, que Callisto joue le rôle de la planète et JUICE celui du petit corps dans notre modélisation.

Pour chacun des quatre contournements, nous connaissons le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison de la sonde JUICE avant et après chaque contournement. Ces valeurs sont issues de notre article de référence [17] et figurent dans la TABLE 6.1. Dans celle-ci, la première ligne représente les éléments orbitaux connus avant la première rencontre ; les deuxième, troisième et quatrième lignes désignent aussi bien les valeurs d'éléments visés après un contournement que celles des éléments connus avant le contournement suivant ; et la dernière ligne reprend les valeurs des éléments visés après le quatrième contournement. Connaissant trois éléments orbitaux avant et après chacune des rencontres, nous allons étudier ces contournements à l'aide de la théorie présentée dans le deuxième point du chapitre 5.

a (en km)	e	i (en degrés)
1880000	0.49	7
1880000	0.44	15
1720000	0.38	22
1880000	0.44	15
1880000	0.49	7

TABLE 6.1 – Table reprenant les valeurs du demi-grand axe (en km), de l'excentricité et de l'inclinaison (en degrés) de la sonde avant et après chaque contournement. Les deuxième, troisième et quatrième lignes désignent aussi bien les éléments après le contournement souhaités que les éléments avant le contournement connus.

Grâce aux informations contenues dans cette TABLE 6.1, nous allons tester notre implémentation de la théorie présentée au deuxième point du chapitre 5. Cette implémentation, réalisée grâce au logiciel *Matlab*[®], consiste à calculer les différents éléments de cette partie et à représenter les graphiques des différents cercles dont l'équation est mentionnée dans celle-ci. Les résultats et les graphiques de cette implémentation seront représentés dans des tables et des figures.

Premièrement, pour chaque contournement, nous déterminons les valeurs des trois premières variables d'Öpik U , θ'_* et ϕ'_* après le contournement. Celles-ci sont reprises à la TABLE 6.2 où l'ordre des lignes correspond à l'ordre des contournements.

Ensuite, nous cherchons les trois cercles représentant l'ensemble des couples de valeurs possibles pour les variables d'Öpik ξ_b et ζ_b de la sonde avant chaque contournement en connaissant respectivement les valeurs de $\cos \theta'_*$, K_{c*} et K_{s*} permettant de tracer chacun des cercles. Les valeurs des centres de ces trois cercles ainsi que celles de leurs rayons sont reprises dans la TABLE 6.3 où l'ordre des lignes correspond à celui des contournements, et l'unité de longueur est celle du

U	θ'_*	ϕ'_*
0.5190	105.1223	298.6495
0.5148	110.4427	313.1751
0.5157	105.0247	298.0185
0.5148	104.9983	280.0351

TABLE 6.2 – Table reprenant les valeurs des variables d'Öpik U , θ'_* et ϕ'_* de la sonde après chaque contournement. L'ordre des lignes correspond à l'ordre des contournements.

$(0, D)$	R	(D_{c1}, D_{c2})	R_c	(D_{s1}, D_{s2})	R_s
—	—	$(-0.6215, 0.0352)$	0.5637	$(-0.3615, -0.4350)$	0.9065
$(0, -1.7823)$	1.7289	$(-0.7770, 0.1062)$	0.6744	$(-0.4566, -0.2237)$	0.7138
$(0, 1.7257)$	1.7789	$(0.6424, -0.2114)$	0.7863	$(0.6690, 0.2484)$	0.5100
—	—	$(0.5219, -0.0713)$	0.5818	$(0.8034, 0.3936)$	0.5310

TABLE 6.3 – Table reprenant les valeurs des centres $(0, D)$, (D_{c1}, D_{c2}) et (D_{s1}, D_{s2}) ainsi que celles des rayons R , R_c et R_s des trois cercles établis grâce à la connaissance du $\cos \theta'_*$, de K_{c*} et de K_{s*} . L'unité de longueur est le rayon de Callisto et l'ordre des lignes correspond à l'ordre des contournements.

rayon de Callisto⁵.

Nous remarquons directement que le premier et le quatrième contournement ne possèdent pas de valeurs pour le centre et le rayon du cercle se basant sur la connaissance du cosinus de l'angle θ'_* . En réalité, dans le cas de ces deux contournements, les valeurs de D et de R sont infinies. En effet, lors de l'étude de ces contournements, nous souhaitons une valeur de demi-grand axe, après le contournement, identique à celle déjà connue avant le contournement. Dès lors, la valeur du cosinus de la variable θ'_* , déterminée grâce aux deux variables U et a'_* dans l'expression (5.1), est analytiquement identique à celle du cosinus de θ . La différence entre ces deux valeurs de cosinus, que nous retrouvons au dénominateur de l'expression de D et de R en (5.4), est alors nulle. Dans notre implémentation, cette différence est également nulle. Les valeurs de R et D sont donc infinies et nous ne pouvons pas représenter le cercle correspondant à la connaissance du cosinus de la variable θ'_* pour ces deux contournements.

En revanche, ce dernier cercle peut être représenté dans le cas du deuxième et du troisième contournement. Nous savons également représenter les cercles relatifs à la connaissance des quantités K_{c*} et K_{s*} dans les quatre contournements. La FIGURE 6.4 reprend les représentations de ces cercles pour le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième contournement. Sur celle-ci, les cercles bleus désignent ceux basés sur la connaissance du cosinus de θ'_* , les cercles rouges représentent les cercles dont la connaissance de la valeur de K_{c*} a permis le traçage, et les cercles

5. Pour connaître les différents paramètres physique de Callisto, nous avons visité le site de la NASA [11]. Celui de la NASA [12] nous renseigne sur les caractéristiques physique de Jupiter.

verts désignent ceux tracés en connaissant la valeur de K_{s*} . Nous notons également que, par souci de clarté, l'échelle utilisée pour les longueurs est le rayon de Callisto.

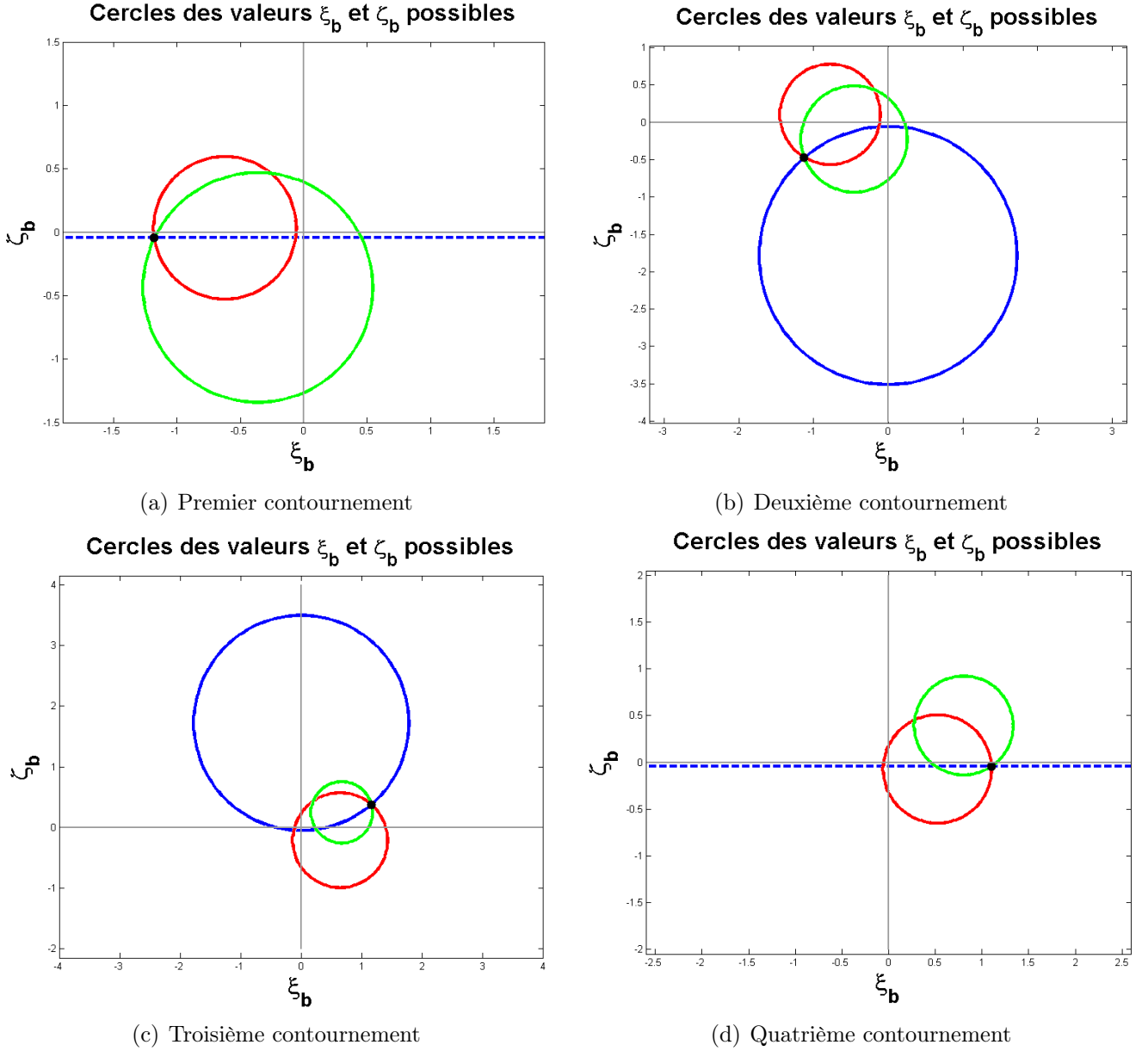


FIGURE 6.4 – Représentation, pour chacun des contournements, des cercles dont les centres et les rayons sont repris dans la TABLE 6.3. La signification des couleurs est détaillée dans le texte et l'unité de longueur est le rayon de Callisto. Lorsque le cercle de centre $(0, D)$ et de rayon R n'est pas défini, nous représentons la ligne horizontale jouant son rôle. L'intersection des cercles et des lignes est représentée par un rond noir et nous donne les valeurs de ξ_{b*} et ζ_{b*} .

À présent, nous pouvons résoudre le système formé des trois équations des cercles pour obtenir les valeurs de ξ_{b*} et ζ_{b*} de la sonde avant chaque contournement. Ces dernières sont représentées par un rond noir situé à l'intersection des cercles de chaque représentation de la FIGURE 6.4. Nous notons que, dans le premier et le quatrième contournement, le système à résoudre est légèrement différent de celui établi en (5.9) étant donné que les valeurs de D et R sont infinies. En effet, comme le cosinus de la variable θ'_* est identique à celui de la variable θ , nous pouvons

retravailler l'équation qui a permis la détermination de celle, en (5.4), du cercle de centre $(0, D)$ et de rayon R . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}(\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) \cos \theta'_* &= (\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta \\ 2c^2 \cos \theta &= 2c \zeta_b \sin \theta \\ \Leftrightarrow \zeta_b &= \frac{c \cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

Cette équation représentant une ligne horizontale remplace la première équation du système (5.9). Cette ligne horizontale est d'ailleurs représentée en traits discontinus bleus à la FIGURE 6.4 sur la première et la dernière représentation.

Enfin, nous déduisons pour chaque contournement les valeurs des éléments orbitaux angulaires de la sonde. L'ensemble de ces valeurs, ainsi que les valeurs des variables d'Öpik ξ_{b*} et ζ_{b*} et celle du paramètre d'impact b , sont reprises dans la TABLE 6.4 où l'ordre des contournements correspond à celui des lignes, et où le rayon de Callisto est l'unité de longueur. L'extension de notre théorie d'Öpik nous permet dès lors de connaître les valeurs des éléments orbitaux angulaires de la sonde JUICE avant chacun de ces contournements autour de Callisto donnant lieu à une orbite souhaitée après le contournement.

ξ_{b*}	ζ_{b*}	b	f_b	w	$\lambda_p - \Omega$
-1.1795	-0.0444	1.1803	240.5472	118.7602	359.3126
-1.126367	-0.470608	1.220727	243.823219	115.910421	359.743298
1.162042	0.378758	1.222211	234.765319	125.382410	0.136518
1.103112	-0.044727	1.104018	243.652724	116.625067	0.268381

TABLE 6.4 – Table reprenant les valeurs des variables d'Öpik ξ_{b*} et ζ_{b*} , celle du paramètre d'impact b et celles des éléments orbitaux angulaires de la sonde avant chaque contournement, représenté dans l'ordre des lignes. L'unité de longueur est le rayon de Callisto.

6.3 Les contournements de Callisto par la sonde JUICE pour établir un algorithme général

À présent, nous reprenons la deuxième application issue de l'article de référence [17] de G.B. Valsecchi et al. pour appliquer notre théorie d'Öpik présentée dans le chapitre 4. Pour rappel, cette théorie nous permet de déterminer l'ensemble des éléments orbitaux, inconnus, du petit corps après le contournement sur base de ceux, connus, avant le contournement. Grâce aux résultats de l'étude des contournements de Callisto par la sonde JUICE, présentée par G.B. Valsecchi et al. dans [17], nous pourrions appliquer notre implémentation de cette théorie d'Öpik, réalisée grâce au logiciel *Matlab*[®], sur ces contournements et comparer nos résultats. Nous tenterons également de déterminer un algorithme général appliquant cette théorie d'Öpik à n'importe quel rapprochement entre deux corps célestes. Nous verrons alors que les résultats de l'étude effectuée dans l'article de référence de G.B. Valsecchi et al. ne nous permet pas d'établir cet algorithme car

nous n'avons pas trouvé de critère général concernant la sélection de l'anomalie vraie au temps t_0 .

Pour pouvoir appliquer la théorie d'Öpik sur le cas des contournements de Callisto par la sonde JUICE, nous devons connaître les éléments orbitaux de celle-ci avant chaque contournement. Nous nous basons sur les données issues de l'étude de ces contournements réalisée par G.B. Valsecchi et al. dans [17]. Tout d'abord, nous y récupérons les valeurs du demi-grand axe, de l'excentricité, de l'inclinaison et de l'argument du péricentre de la sonde avant chaque contournement. Ceux-ci sont repris dans les quatre premières lignes des quatre premières colonnes de la TABLE 6.5 où l'ordre des contournements correspond à l'ordre des lignes.

Ensuite, parmi ces données, nous trouvons la valeur de la différence entre la longitude du nœud ascendant de la sonde JUICE et la longitude de Callisto avant chaque contournement. Nous reprenons ces valeurs dans la cinquième colonne de la TABLE 6.5. Grâce à celles-ci, nous pouvons déduire la valeur de la longitude du nœud ascendant de l'orbite de JUICE et celle de la longitude de Callisto. En effet, dans la théorie d'Öpik, lorsque la longitude du nœud ascendant intervient dans la détermination d'une expression, celle-ci apparaît grâce à la différence entre la longitude de la planète et elle-même. Dès lors, le choix des valeurs de ces deux longitudes doit respecter la valeur de leur différence. Nous pouvons donc sélectionner une valeur quelconque, entre 0° et 360° , pour la longitude du nœud ascendant de l'orbite de JUICE, et en déduire la valeur de la longitude de Callisto de manière à ce que leur différence corresponde aux valeurs données dans la cinquième colonne de la TABLE 6.5. Arbitrairement, nous considérons que la longitude du nœud ascendant de JUICE vaut 30° pour chaque contournement. Nous déduisons les valeurs de la longitude de Callisto pour les différents contournements dans la sixième colonne de la TABLE 6.5.

Enfin, pour chaque contournement, la détermination de l'anomalie vraie au temps t_0 se fait dans un premier temps grâce à la connaissance du lieu de rencontre. Dans un deuxième temps, les valeurs des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b et celles des éléments orbitaux de la sonde JUICE après chaque contournement nous aiderons à déterminer la valeur de l'anomalie vraie au temps t_0 .

Premièrement, G.B. Valsecchi et al. nous informent, dans [17], que la rencontre s'effectue pour chaque contournement au nœud ascendant de l'orbite de la sonde, lorsque celle-ci est sur sa branche pré-péricentre. Cette information nous permet de déterminer un intervalle de valeurs possibles pour l'anomalie vraie f_0 précédant la valeur de f_b . En effet, lorsque la sonde se trouve à son nœud ascendant, la somme entre son anomalie vraie à cet instant et l'argument du péricentre est nulle. De plus, la valeur de l'argument de son péricentre est inférieure à 180° dans chaque contournement. Dès lors, la sonde se dirige vers son péricentre lorsqu'il se trouve sur son nœud ascendant et son anomalie vraie croît.

Deuxièmement, le choix de la valeur de f_0 parmi ces valeurs possibles se fait grâce aux variables ξ_b et ζ_b et aux éléments orbitaux déterminés suite au contournement de Callisto par la sonde JUICE. Ces deux premières variables se trouvent dans les septième et huitième colonnes de la TABLE 6.5. Les éléments orbitaux de la sonde après le premier, le deuxième et le troisième contournements sont indiqués dans les deuxième, troisième et quatrième lignes de la TABLE 6.5. En effet, les contournements se produisent les uns à la suite des autres. Pour le quatrième contournement, nous ne possédons que les valeurs du demi-grand axe, de l'excentricité et de l'inclinaison de la nouvelle orbite de la sonde. Elles se trouvent dans la cinquième ligne de la TABLE 6.5.

a (en km)	e	i	ω	$\lambda_p - \Omega$	λ_p	ξ_b	ζ_b
1880000	0.49	7°	118.5°	359.3°	29.3°	-1.25	-0.04
1880000	0.44	15°	115.9°	359.8°	29.3°	-1.11	-0.46
1720000	0.38	22°	125.1°	0.1°	30.1°	1.14	0.37
. 1880000	0.44	15°	116.6°	0.3°	30.3°	1.25	-0.04
1880000	0.49	7°	—	—	—	—	—

TABLE 6.5 – Table reprenant les valeurs du demi-grand axe (en km), de l'excentricité et de l'inclinaison (en degrés) de la sonde avant et après chaque contournement. Elle reprend également avant chaque contournement l'argument du péricentre et la différence entre la longitude du nœud ascendant de l'orbite de JUICE et celle de Callisto (en degrés). Enfin, les valeurs des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b avant chaque contournement sont indiquées avec une échelle de longueur égale au rayon de Callisto.

Pour choisir notre anomalie vraie au temps t_0 , nous déterminons, à l'aide d'une implémentation des différentes relations construites au chapitre 4 dans le logiciel de calcul *Matlab*[®], les valeurs des éléments orbitaux a' , e' , i' , ω' , Ω' et des variables ξ_b et ζ_b pour chacune des valeurs possibles de f_0 , et ce, dans les quatre contournements. Nous pouvons ensuite comparer nos résultats à ceux de la TABLE 6.5 et calculer les erreurs relatives entre ceux-ci. Nous sélectionnerons alors l'anomalie vraie au temps t_0 comme étant celle qui correspond à un maximum d'erreurs relatives petites entre nos résultats et les valeurs désirées de notre table de référence.

Une fois ce choix effectué, nous tenterons, dans le cas des contournements de Callisto par JUICE, de déterminer un critère de sélection de l'anomalie vraie plus général et indépendant de la connaissance des éléments orbitaux de la nouvelle orbite de JUICE afin d'établir un algorithme général appliquant la théorie d'Öpik. Cependant, comme nous allons le voir, l'application de notre implémentation permettant de déterminer l'anomalie vraie au temps t_0 ne nous donne pas de bons résultats dans le cas du troisième contournement. De plus, comme nous allons l'expliquer dans la suite, l'ensemble des données issues de l'article de référence de G.B. Valsecchi et al. [17] ne nous permet pas d'établir un critère de sélection général de cette anomalie vraie.

6.3.1 Le troisième contournement

Lors de l'application de la théorie d'Öpik sur le cas du troisième contournement, nous avons obtenu des résultats très différents de ceux attendus et repris dans la TABLE 6.5. Nos résultats, pour les différentes valeurs possibles de f_0 sont présentés dans la TABLE 6.6. Nous remarquons directement que les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité de la nouvelle orbite sont beaucoup trop élevées et que celle de l'argument du péricentre est trop petite par rapport aux valeurs attendues reprises à la quatrième ligne de la TABLE 6.5. De plus, pour toutes les valeurs possibles de f_0 , celles de la variable ξ_b sont également trop petites par rapport à celles visées à la troisième ligne de la TABLE 6.5.

Dès lors, nous pouvons penser que l'intervalle choisi pour les valeurs possibles de f_0 est trop petit. En réalité, en calculant les variables ξ_b et ζ_b pour des valeurs de f_0 allant de 0° à 360°, nous avons constaté que la variable ξ_b ne s'approche jamais de la valeur de 1.14 unités de longueur, indiquée dans la TABLE 6.5. La variable ζ_b prend, quant à elle, une valeur proche de 0.37 unité

f_0	a' (en km)	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
235.00670°	647495.66064	0.56398	15.24745°	55.32596°	30.05775°	0.11106	0.54576
235.00675°	3894353.09463	0.58818	14.65131°	53.17206°	30.05447°	0.11106	0.51172
235.00680°	4207100.07209	0.61554	13.96612°	50.97234°	30.05075°	0.11106	0.47768
235.00685°	4614129.05322	0.64642	13.17363°	48.73302°	30.04643°	0.11106	0.44364
235.00690°	5161840.65595	0.68116	12.25109°	46.46124°	30.04122°	0.11105	0.40960
235.00695°	5930797.81232	0.72004	11.16995°	44.16517°	30.03466°	0.11105	0.37556
235.00700°	7072110.95657	0.76311	9.89440°	41.85416°	30.02588°	0.11105	0.34152
235.00705°	8899680.47525	0.81005	8.37971°	39.53952°	30.01303°	0.11105	0.30748
235.00710°	12164714.32141	0.85975	6.57063°	37.23686°	29.99138°	0.11105	0.27344
235.00715°	19085722.61338	0.90978	4.40063°	34.97655°	29.94433°	0.11105	0.23940
235.00720°	38943721.48791	0.95537	1.79349°	32.90720°	29.74356°	0.11105	0.20537

TABLE 6.6 – Table contenant les résultats de notre implémentation sur le troisième contournement. Nous y retrouvons les valeurs possibles de f_0 , les valeurs du demi-grand axe (en km), celles de l'excentricité ainsi que celles de l'inclinaison, de l'argument du péricentre et de la longitude du nœud ascendant en degrés. Elle reprend également celles des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b dans l'unité de longueur égale au rayon de Callisto.

de longueur, visée dans cette même table, uniquement lorsque l'anomalie vraie de la sonde vaut 235.00695°.

Nous allons alors tenter de trouver l'erreur dans nos résultats. Tout d'abord, les deux variables d'Öpik ξ_b et ζ_b sont déterminées grâce aux variables θ et ϕ et à la position, x_0 , y_0 et z_0 , de la sonde lors de son entrée dans la sphère d'influence de Callisto. Nous déterminons, pour la valeur de l'anomalie vraie correspondant à 235.00695°, ces valeurs intermédiaires grâce à notre implémentation et nous obtenons les résultats repris à la TABLE 6.7. Les deux premières variables d'Öpik θ et ϕ possèdent des valeurs correctes. En effet, d'après G.B. Valsecchi et al. dans [17], ces variables valent respectivement 110.4° et 313.1° avant le troisième contournement. Dès lors, l'erreur peut provenir des valeurs de x_0 , y_0 et z_0 . Cependant, l'expression de cette position dépend des éléments orbitaux de la sonde avant le contournement. Le seul élément orbital dont nous doutons est l'anomalie vraie. Il nous manque donc une information afin de déterminer correctement cette anomalie vraie lors du troisième contournement.

ξ_b	ζ_b	θ	ϕ	x_0	y_0	z_0
0.11105	0.37556	110.46032°	313.27396°	-0.41781	-0.65396	0.54590

TABLE 6.7 – Table reprenant les valeurs des éléments intermédiaires permettant la détermination des valeurs des variables ξ_b et ζ_b pour une anomalie vraie valant 235.00695°. Les angles sont exprimés en degrés et les longueurs ont comme unité le rayon de Callisto.

6.3.2 Les premier, deuxième et troisième contournements

Les résultats de l'application de l'algorithme sur les premier, deuxième et quatrième contournements nous permettent, eux, de sélectionner l'anomalie vraie de la sonde au temps t_0 . En utilisant la même implémentation que pour le troisième contournement, nous allons reprendre, pour chaque contournement, les résultats de cette implémentation dans différentes tables. Ensuite, nous les comparerons avec les valeurs visées de la TABLE 6.5 et nous sélectionnerons la valeur de l'anomalie vraie f_0 à l'aide des erreurs relatives entre nos résultats et les valeurs de référence.

Pour le premier contournement, les résultats sont repris dans la TABLE 6.8. Les valeurs des nouveaux éléments orbitaux sont alors comparés à la deuxième ligne de la TABLE 6.5, prise comme table de référence, alors que les valeurs des variables d'Öpik sont comparées à celles de la première ligne de cette table. Suite à cette comparaison, nous déduisons la valeur de l'anomalie vraie comme étant 240.79415° . En effet, les résultats correspondant à cette anomalie vraie semblent être les plus proches de ceux visés dans notre table de référence et les erreurs relatives entre les valeurs de référence et nos résultats, présentées dans la TABLE 6.9, sont petites.

f_0	a' (en km)	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
240.79400°	1908141.90284	0.45545	13.36314°	115.035508°	29.75318°	-1.59857	0.07171
240.79405°	1899009.03110	0.45576	13.39944°	115.59404°	29.75132°	-1.59857	0.03429
240.79410°	1889924.64471	0.45614	13.42924°	116.15640°	29.74970°	-1.59857	-0.00313
240.79415°	1880917.66910	0.45661	13.45238°	116.72051°	29.74833°	-1.59857	-0.04055
240.79420°	1872015.97136	0.45716	13.46875°	117.28428°	29.74721°	-1.59857	-0.07797
240.79425°	1863246.09037	0.45778	13.47827°	117.84566°	29.74634°	-1.59857	-0.11539
240.79430°	1854632.99752	0.45848	13.48092°	118.40263°	29.74572°	-1.59857	-0.15282

TABLE 6.8 – Table contenant les résultats de notre implémentation sur le premier contournement. Nous y retrouvons les valeurs possibles de f_0 , les valeurs du demi-grand axe (en km), celles de l'excentricité ainsi que celles de l'inclinaison, de l'argument du péricentre et de la longitude du nœud ascendant en degrés. Elle reprend également celles des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b dans l'unité de longueur égale au rayon de Callisto. L'anomalie vraie choisie est mise en évidence.

a'	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
5.10^{-4}	3.10^{-2}	1.10^{-1}	7.10^{-3}	8.10^{-3}	2.10^{-1}	1.10^{-2}

TABLE 6.9 – Table contenant, pour l'anomalie vraie de 240.79415° sélectionnée dans le cas du premier contournement, les erreurs relatives entre les résultats obtenus par notre implémentation de la théorie d'Öpik et les valeurs de référence de la TABLE 6.5.

Pour le deuxième contournement, nous prenons une anomalie vraie de valeur 243.89340° parmi les valeurs possibles de l'anomalie vraie de la TABLE 6.10. Ce choix a été déterminé à la suite de la comparaison entre nos résultats et ceux de notre TABLE 6.5 de référence. Plus particulièrement, nous avons regardé les éléments orbitaux de la troisième ligne et les variables ξ_b et ζ_b de la deuxième

f_0	a' (en km)	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
243.89325°	1749640.96451	0.37330	21.95497°	122.10700°	29.94497°	-1.15840	-0.38599
243.89330°	1739290.43136	0.37646	21.88667°	123.05418°	29.94486°	-1.15840	-0.42248
243.89335°	1729675.30133	0.37968	21.80876°	123.93462°	29.94481°	-1.15840	-0.45897
243.89340°	1720783.76209	0.38293	21.72209°	124.74879°	29.94483°	-1.15840	-0.49545
243.89345°	1712598.81747	0.38617	21.62753°	125.49793°	29.94491°	-1.15840	-0.53194
243.89350°	1705099.18140	0.38939	21.52599°	126.18390°	29.94505°	-1.15840	-0.56842
243.89355°	1698260.12644	0.39255	21.41834°	126.80902°	29.94523°	-1.15840	-0.60491

TABLE 6.10 – Table contenant les résultats de notre implémentation sur le deuxième contournement. Nous y retrouvons les valeurs possibles de f_0 , les valeurs du demi-grand axe (en km), celles de l'excentricité ainsi que celles de l'inclinaison, de l'argument du péricentre et de la longitude du nœud ascendant en degrés. Elle reprend également celles des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b dans l'unité de longueur égale au rayon de Callisto. L'anomalie vraie choisie est mise en évidence.

a'	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
5.10^{-4}	8.10^{-3}	1.10^{-2}	2.10^{-3}	2.10^{-3}	3.10^{-2}	7.10^{-2}

TABLE 6.11 – Table contenant, pour l'anomalie vraie de 243.89340° sélectionnée dans la cas du deuxième contournement, les erreurs relatives entre les résultats obtenus par notre implémentation de la théorie d'Öpik les valeurs de référence de la TABLE 6.5.

ligne de cette table de référence. De la même manière que pour le premier contournement, nous présentons les erreurs relatives entre nos résultats, pour l'anomalie vraie valant 243.89340°, et les valeurs de référence dans la TABLE 6.11.

Enfin, pour le quatrième contournement, parmi l'ensemble des valeurs possibles pour l'anomalie vraie présentées dans la TABLE 6.12, nous choisissons celle valant 243.71050°. Malheureusement, dans ce cas-ci, nous ne pouvons pas comparer les valeurs de l'argument du péricentre et celles de la longitude du nœud ascendant aux valeurs de notre table de référence 6.5. En revanche, les valeurs des nouveaux éléments orbitaux sont comparées à celles de la cinquième ligne de cette table, et celles des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b sont mises en lien avec celles de la quatrième ligne de cette même table. Ayant sélectionné la valeur 243.71050° pour l'anomalie vraie, nous déterminons les erreurs relatives entre nos résultats et les valeurs de référence et nous les présentons dans la TABLE 6.13.

Nous terminons ce point en comparant les erreurs relatives des éléments orbitaux et des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b dans un même contournement. Nous constatons, dans les trois contournements étudiés, que les éléments les mieux déterminés sont le demi-grand axe et l'excentricité. Dans les deux premiers contournements, nous pouvons y ajouter la longitude du nœud ascendant et l'argument du péricentre. La variable ξ_b et l'inclinaison sont les éléments les moins bien déterminés même si ceux-ci ont une erreur relative inférieure ou égale à un dixième.

f_0	a' (en km)	e'	i'	ω'	Ω'	ξ_b	ζ_b
243.71035°	1945224.39774	0.48845	5.01659°	116.75450°	29.46564°	1.02442	0.064636
243.71040°	1923070.65372	0.48949	4.97118°	118.01333°	29.45461°	1.02442	0.028093
243.71045°	1901227.46111	0.49065	4.95036°	119.26500°	29.44755°	1.02442	-0.008449
243.71050°	1879847.11837	0.49191	4.95481°	120.49983°	29.44474°	1.02442	-0.044992
243.71055°	1859068.08044	0.49325	4.98485°	121.70864°	29.44625°	1.02442	-0.081535
243.71060°	1839012.51702	0.49467	5.04042°	122.88299°	29.45197°	1.02442	-0.118078
243.71065°	1819784.64265	0.49613	5.12108°	124.01541°	29.46163°	1.02442	-0.154620

TABLE 6.12 – Table contenant les résultats de notre implémentation sur le quatrième contournement. Nous y retrouvons les valeurs possibles de f_0 , les valeurs du demi-grand axe (en km), celles de l'excentricité ainsi que celles de l'inclinaison, de l'argument du péricentre et de la longitude du nœud ascendant en degrés. Elle reprend également celles des variables d'Öpik ξ_b et ζ_b dans l'unité de longueur égale au rayon de Callisto. L'anomalie vraie choisie est mise en évidence.

a'	e'	i'	ξ_b	ζ_b
8.10^{-5}	3.10^{-3}	2.10^{-1}	1.10^{-1}	1.10^{-2}

TABLE 6.13 – Table contenant, pour l'anomalie vraie de 243.71050° sélectionnée dans le cas du quatrième contournement, les erreurs relatives entre les résultats obtenus par notre implémentation de la théorie d'Öpik et les valeurs de référence de la TABLE 6.5.

6.3.3 Le choix d'un critère de sélection pour l'anomalie vraie

Nous allons à présent tenter de déterminer un critère permettant la sélection de l'anomalie vraie au temps t_0 de manière générale, et sans nécessairement connaître les éléments orbitaux après le rapprochement entre Callisto et la sonde JUICE. Au vu des mauvais résultats obtenus pour le troisième contournement, nous l'écartons de notre étude. Nous testons alors différents types de critères sur les premier, deuxième et quatrième contournements.

Pour déterminer le premier critère possible, nous repartons du critère de proximité élaboré lors de l'entrée du petit corps dans la sphère d'influence dans le point 4.3. En effet, nous avons considéré que le petit corps entrait dans la sphère d'influence de la planète lorsque ces deux corps étaient proches. Plus précisément, nous avons considéré que deux corps étaient proches lorsque les quantités Δr , $\Delta \lambda$ et $\Delta \beta$ relatives aux deux corps étaient petites ou encore lorsque leurs carrés étaient négligeables. Étant donné que nous cherchons l'anomalie vraie du petit corps, qui est représenté ici par la sonde, lors de son entrée dans la sphère d'influence de Callisto, nous pouvons observer les valeurs de ces quantités et déterminer à partir de quel seuil nous considérons qu'elles sont petites ou que leurs carrés sont négligeables. Pour chacun des trois contournements étudiés, nous avons calculé les valeurs de ces quantités, ainsi que leurs carrés, à partir de l'anomalie vraie sélectionnée au point précédent et grâce à une implémentation réalisée dans le logiciel *Matlab*®. Ces valeurs sont reprises dans la TABLE 6.14.

f_0	Δr	$\Delta \lambda$	$\Delta \beta$	$(\Delta r)^2$	$(\Delta \lambda)^2$	$(\Delta \beta)^2$
240.79415°	$-2.75 \cdot 10^{-3}$	$-5.89 \cdot 10^{-4}$	$-8.60 \cdot 10^{-2}$	$7.58 \cdot 10^{-6}$	$3.47 \cdot 10^{-7}$	$7.40 \cdot 10^{-3}$
243.89340°	$-1.41 \cdot 10^{-3}$	$4.40 \cdot 10^{-4}$	$-5.35 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-6}$	$1.93 \cdot 10^{-7}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$
243.71050°	$1.52 \cdot 10^{-4}$	$-7.98 \cdot 10^{-5}$	$8.04 \cdot 10^{-2}$	$2.32 \cdot 10^{-8}$	$6.37 \cdot 10^{-9}$	$6.46 \cdot 10^{-3}$

TABLE 6.14 – *Table reprenant, pour les anomalies vraies sélectionnées dans le premier, le deuxième et le quatrième contournements, les valeurs des quantités Δr , $\Delta \lambda$ et $\Delta \beta$, ainsi que leurs carrés afin de chercher le seuil à partir duquel ces valeurs sont considérées comme petites.*

En analysant cette table, nous ne pouvons malheureusement pas déterminer un seuil commun aux trois contournements. En effet, tout comme les valeurs de l'excentricité, de l'inclinaison et de la longitude du nœud ascendant de la nouvelle orbite de JUICE, et contrairement à celles de la variable d'Öpik ζ_b des TABLES 6.8, 6.10 et 6.12, ces quantités, ainsi que leurs carrés, varient lentement. Dès lors, si nous considérons, par exemple, que la quantité $(\Delta r)^2$ est négligeable lorsqu'elle est inférieure ou égale à $2.32 \cdot 10^{-8}$, les anomalies vraies sélectionnées dans le point précédent pour le premier et le deuxième contournement ne vérifieront pas ce critère. Nous risquons alors de prendre une mauvaise valeur d'anomalie vraie, voire de ne pas trouver de valeur pour celle-ci. Nous prenons en réalité un seuil trop petit pour le premier et le deuxième contournements. Inversement, si notre seuil considère que la quantité $(\Delta r)^2$ est négligeable dès qu'elle est inférieure à $7.58 \cdot 10^{-6}$, nous n'obtiendrons pas la bonne valeur de l'anomalie vraie dans le quatrième contournement. Notre critère est en fait trop grand pour le quatrième contournement. Dès lors, nous risquons de ne pas sélectionner la bonne valeur de l'anomalie vraie et donc de ne pas obtenir les bons éléments orbitaux pour la nouvelle orbite de JUICE. Nous pouvons faire la même analyse pour les autres quantités.

Le deuxième critère à tester est construit sur base des approximations faites dans le cadre de la détermination de la position du petit corps à l'entrée de la sphère d'influence de la planète dans le repère planétocentrique. Celles-ci ont été réalisées dans la section 4.3. Nous avons vu que la position du petit corps dans le repère planétocentrique pouvait s'exprimer grâce au cosinus et au sinus des quantités Δr , $\Delta \lambda$ et $\Delta \beta$. Or, lorsque nous sommes dans la sphère d'influence, ces quantités sont petites. Nous prenons donc les approximations suivantes : les cosinus par la valeur de 1 et les sinus par la valeur de leur argument. Nous allons tester ces approximations comme critère possible pour sélectionner l'anomalie vraie au temps t_0 . Nous calculons, pour les anomalies vraies sélectionnées dans le point précédent pour chaque contournement, la différence entre le cosinus de $\Delta \lambda$ et 1, le sinus de $\Delta \lambda$ et celui-ci, et le cosinus de $\Delta \beta$ et 1, et nous tentons de déterminer, sur base des résultats repris à la TABLE 6.15, le seuil à partir duquel ces quantités sont proches de zéro. Les valeurs de la TABLE 6.15, comme pour le premier critère, varient lentement. Dès lors, nous pouvons faire la même remarque que pour le premier critère.

Nous pouvons tester un troisième et dernier critère. Celui-ci est issu de l'article [16] de G.B. Valsecchi et propose de choisir le temps t_0 de manière à ce que la valeur de la différence entre la longitude du petit corps et celle de la planète soit nulle. Ainsi, pour ce temps t_0 choisi, nous pouvons simplifier l'expression de la position du petit corps dans le repère planétocentrique, que

f_0	$approx_1$	$approx_2$	$approx_3$	$(approx_1)^2$	$(approx_2)^2$	$(approx_3)^2$
240.79415°	$-5.29.10^{-11}$	$5.79.10^{-4}$	$-1.13.10^{-6}$	$2.796286.10^{-21}$	$3.35.10^{-7}$	$1.27.10^{-12}$
243.89340°	$-2.94.10^{-11}$	$-4.32.10^{-4}$	$-4.36.10^{-7}$	$8.67.10^{-22}$	$1.87.10^{-7}$	$1.90.10^{-13}$
243.71050°	$9.71.10^{-13}$	$7.85.10^{-5}$	$-9.84.10^{-7}$	$9.42.10^{-25}$	$6.15.10^{-9}$	$9.68.10^{-13}$

TABLE 6.15 – Table reprenant, pour les anomalies vraies sélectionnées dans le premier, le deuxième et le quatrième contournements, les approximations suivantes : $approx_1 = \cos(\Delta\lambda) - 1$, $approx_2 = \sin(\Delta\lambda) - \Delta\lambda$ et $approx_3 = \cos(\Delta\beta) - 1$ ainsi que leurs carrés.

nous notons $(x_{0approx} \ y_{0approx} \ z_{0approx})^T$. Celle-ci est

$$\begin{pmatrix} x_{0approx} \\ y_{0approx} \\ z_{0approx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 1 \\ r\Delta\lambda \\ r \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} - 1 \\ 0 \\ \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f_0} \sin i \sin(w + f_0) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Nous notons que la première égalité est obtenue à l'aide de la relation (4.6).

Nous avons alors déterminé, à l'aide d'une implémentation réalisée dans le logiciel *Matlab*[®], pour chacune des anomalies vraies sélectionnées dans la section 6.3.2 pour chaque contournement, les valeurs des coordonnées cartésiennes de la position de la sonde JUICE au temps t_0 dans le repère planétocentrique. Ensuite, nous les comparons avec celles calculées grâce à la relation (6.1). Nous regardons si la différence entre les valeurs des coordonnées cartésiennes obtenues par notre implémentation et celles données par (6.1) est nulle. Les valeurs de ces différences sont reprises pour chaque contournement à la TABLE 6.16.

f_0	$x_0 - x_{0approx}$	$y_0 - y_{0approx}$	$z_0 - z_{0approx}$
240.79415°	0	-5.8760510^{-4}	2.1684010^{-19}
243.89340°	0	4.39046^{-4}	1.08420^{-19}
243.71050°	0	$-7.98464.10^{-5}$	$2.16840.10^{-19}$

TABLE 6.16 – Table reprenant, pour les anomalies vraies sélectionnées dans le premier, le deuxième et le quatrième contournements, les différences entre les valeurs des coordonnées cartésiennes obtenues par notre implémentation et celles données par (6.1).

Pour chaque contournement, nous remarquons que la différence entre la première composante du vecteur position obtenue par notre implémentation et celle donnée en (6.1) est nulle. En réalité, notre choix du temps t_0 , ne modifie pas l'expression de cette première composante. En effet, la différence entre la longitude de JUICE et celle de Callisto n'intervient pas dans l'expression de

x_0 . Elle n'intervient pas non plus dans l'expression de z_0 . Dès lors, la différence entre la troisième composante du vecteur position obtenue par notre implémentation et celle du vecteur (6.1) est nulle. Dans notre TABLE 6.16, celle-ci atteint une valeur de l'ordre de 10^{-19} . Nous pouvons donc la considérer comme nulle. Nous devons alors comparer, pour chaque contournement, uniquement la valeur de y_0 obtenue par notre implémentation de la théorie d'Öpik et celle de $y_{0approx}$. Malheureusement, la constatation faite pour les deux autres critères est également valable ici. Dès lors, il nous est également impossible d'en conclure un critère commun aux trois contournements.

Nos choix de critères n'ont dès lors pas permis d'aboutir à un critère de sélection plus général de l'anomalie vraie. En effet, pour une petite modification de l'anomalie vraie de JUICE, nous avons pu constater que presque tous les éléments déterminés par notre théorie d'Öpik avant le contournement varient lentement. Seule la variable d'Öpik ζ_b varie rapidement. Cependant, l'ensemble de ces éléments nous permet de déterminer les variables d'Öpik après le contournement, ainsi que les nouveaux éléments orbitaux. Selon leur implication dans les expressions des nouveaux éléments orbitaux, ces derniers varient rapidement ou non. Dès lors, cette double tendance présente dans les expressions établies par la théorie d'Öpik ne nous permet pas de déduire un critère général pour la sélection de l'anomalie vraie de JUICE au temps t_0 . Nous n'avons donc pas réussi à établir un algorithme général pour appliquer cette théorie d'Öpik sur un cas quelconque de rapprochement entre deux corps pour lesquels nous ne connaissons pas les éléments orbitaux après ce rapprochement.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce mémoire, nous avons détaillé la construction de la théorie d'Öpik. Celle-ci nous permet d'étudier le changement instantané de trajectoire d'un corps de masse négligeable lorsqu'il passe à proximité d'un deuxième corps de masse plus importante. En effet, ce dernier étant plus massif, il va attirer le premier corps de masse négligeable. Celui-ci va alors dévier de sa trajectoire initiale.

Pour construire cette théorie, nous avons, dans un premier temps, déterminé à partir de quel moment nos deux corps étaient proches. Ensuite, nous avons étudié, de manière locale, le mouvement du corps de masse négligeable jusqu'à l'endroit de son changement instantané de trajectoire. Celui-ci a alors été étudié en utilisant le formalisme d'Öpik et ses variables. Enfin, après ce changement instantané pouvant être vu de manière globale comme un contournement, nous avons établi la nouvelle orbite du corps de masse négligeable.

Nous avons également présenté l'extension de la théorie d'Öpik proposée par G.B. Valsecchi et al. dans leur article [17] de 2015. Cette extension propose de choisir le type d'orbite que le corps de masse négligeable aurait après son rapprochement avec le deuxième corps. Nous avons donc remonté les étapes de la construction de la théorie d'Öpik pour ajouter la connaissance des trois éléments orbitaux angulaires aux trois autres éléments déjà connus avant le contournement.

Enfin, nous avons appliqué la théorie d'Öpik et son extension sur deux exemples concrets. Tout d'abord, nous avons testé l'extension de la théorie d'Öpik sur l'exemple du contournement de la Terre par l'astéroïde Apophis et sur celui des contournements de Callisto par la sonde spatiale JUICE lors de sa mission d'exploration dans le voisinage de Jupiter. Ensuite, nous avons utilisé ce deuxième exemple pour appliquer la théorie d'Öpik. Nous avons implémenté les différentes étapes de la construction de cette théorie et comparé nos résultats avec ceux présentés dans l'article de G.B. Valsecchi et al. [17] en 2015.

Notre présentation de la théorie d'Öpik ainsi que de son extension ont été détaillées aussi bien dans les différents calculs que dans les explications des différents concepts. Dès lors, ce mémoire constitue une bonne base afin de comprendre et de s'appropriier la théorie d'Öpik. Il représente également un bon point de départ pour des recherches plus poussées, effectuées par une personne novice sur le sujet.

De plus, les résultats de nos applications de l'extension de la théorie d'Öpik ont donné des résultats similaires à ceux annoncés dans l'article de G.B. Valsecchi et al. [17]. En revanche, l'implémentation de la théorie d'Öpik sur les contournements de Callisto par JUICE n'est pas au point pour tous les contournements. En effet, nos résultats concernant un des contournements ne sont pas similaires à ceux attendus et repris dans ce même article de G.B. Valsecchi.

Ajoutons à cela que la recherche d'un algorithme général permettant d'appliquer la théorie d'Öpik sur un rapprochement inconnu entre deux corps n'a pas abouti. Nous ne sommes pas parvenu à déterminer l'instant à partir duquel les deux corps sont considérés comme proches. En réalité, nous ne possédions pas assez d'informations issues de l'article de G.B. Valsecchi et al. paru en 2015 pour pouvoir comparer nos résultats et obtenir cet algorithme général.

Même si la théorie d'Öpik nous permet de décrire le mouvement effectué par un corps de masse négligeable contournant un autre corps plus massif, elle possède ses limites. En effet, cette théorie se base sur un ensemble d'hypothèses concernant les masses des trois corps, l'orbite du deuxième corps, etc pour pouvoir construire une théorie analytique. Si, dans un cas concret, ses hypothèses ne sont pas vérifiées, les résultats de la théorie d'Öpik seront erronés.

Enfin, nous pouvons envisager quelques perspectives pour ce mémoire. La première perspective est, sans surprise, le fait d'établir un algorithme général pour nous permettre d'utiliser la théorie d'Öpik sur des cas de contournements inconnus, respectant les hypothèses de notre modèle de cette théorie. Cet algorithme devrait alors être établi à l'aide d'une autre application que celle choisie dans ce mémoire.

Une deuxième perspective envisageable est l'application de la théorie d'Öpik aux cas des débris spatiaux. Selon le site de CNES [2], les débris spatiaux constituent "l'ensemble des objets créés par l'Homme (satellite, étage de lancement d'une fusée, etc), incluant leurs fragments ou pièces s'en étant détachées, autres qu'un véhicule spatial actif ou susceptible d'être utilisé différemment, se trouvant sur orbite autour de la Terre". Malheureusement, toujours selon le site de CNES [2], il y a beaucoup trop de débris spatiaux autour de la Terre. Ajoutant à cela leur vitesse très élevée et leur orbite mal connue, ces débris constituent un danger de collision potentielle avec les satellites en état de marche.

Face à ce problème de pollution de l'environnement de la Terre, la théorie d'Öpik pourrait amener des éléments de solutions. En effet, ces débris spatiaux sont, pour la plupart, de petite masse, comparé aux satellites en état de marche orbitant autour de la Terre. De plus, ils s'approchent souvent de ces satellites et leur orbite change suite à ces rapprochements. Dès lors, la théorie d'Öpik pourrait aider dans la localisation de ces débris.

L'extension de la théorie d'Öpik permettrait aux satellites en fin de vie d'être encore une fois utiles en se plaçant sur le chemin des débris. Leur placement devrait permettre aux débris de le contourner et d'obtenir une nouvelle orbite impliquant leur retombée sur la Terre. Pour ce faire, l'extension de la théorie d'Öpik pourrai déterminer, sur base de cette orbite souhaitée, la position que ces débris doivent avoir par rapport au satellite avant leur changement instantané de trajectoire. Ce satellite pourrait alors se positionner de manière à ce que les débris possèdent effectivement ces positions avant le contournement.

Bibliographie

- [1] A. CARUSI, G.B. VALSECCHI et R. GREENBERG : *Planetary close encounters : Geometry of approach and post-encounter orbital parameters*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 49:111–131, 1990.
- [2] Centre nationale d'études spatiales (CNES) : *Prévention de l'environnement spatial*. <https://debris-spatiaux.cnes.fr/fr>. Dernière viste : 26 mai 2017.
- [3] Centre nationale d'études spatiales (CNES) : *JUICE, une nouvelle mission d'exploration vers Jupiter et ses lunes*. <https://cnes.fr/fr/web/CNES-fr/10086-gp-juice-une-nouvelle-mission-d-exploration-vers-jupiter-et-ses-lunes.php>, 16 mai 2012. Dernière viste : 20 mai 2017.
- [4] F. COLAS : *L'astéroïde Apophis observé par un astronome français depuis le pic du midi*. <https://cnes.fr/fr/web/CNES-fr/10650-gp-l-asteroide-apophis-observe-par-un-astronome-francais-depuis-le-pic-du-midi.php>, 8 janvier 2013. Dernière viste : 19 mai 2017.
- [5] L. DURIEZ : *Cours de Mécanique Céleste classique*, chapitre 1-10-11-12-23-24. Université de Lille, 2002.
- [6] Space Agency European (ESA) : *Herschel intercepte l'astéroïde Apophis*. http://www.esa.int/fre/ESA_in_your_country/France/Herschel_intercepte_1_asteroide.
- [7] R. GREENBERG, A. CARUSI et G.B. VALSECCHI : *Outcomes of Planetary Close Encounters : A systematic Comparison of Methodologies*. ICARUS, 75:1–29, 1988.
- [8] A. LEMAÎTRE : *Cours d'Algèbre*, chapitre 2. Université de Namur, 2012-2013.
- [9] A. LEMAÎTRE : *Cours de Mécanique du point et du solide*. Université de Namur, 2013-2014.
- [10] C.D. MURRAY et S.F. DERMOTT : *Solar System Dynamics*, chapitre 2-3. Cambridge University Press, Royaume-Uni, 2008.
- [11] National Aeronautics & Space Administration (NASA) : *Planetary Satellite Physical Parameters*. https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par. Dernière viste : 20 mai 2017.
- [12] National Aeronautics & Space Administration (NASA) : *Planets and Pluto : Physical Characteristics*. https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_phys_par. Dernière viste : 25 mai 2017.
- [13] National Aeronautics & Space Administration (NASA) : *Sun : By the Numbers*. <https://solarsystem.nasa.gov/planets/sun/facts>. Dernière viste : 25 mai 2017.
- [14] Near Earth Objects Dynamic Site (NEODys) : *(99942) Apophis*. <http://newton.dm.unipi.it/neodys/index.php?pc=1.1.0&n=99942>. Dernière viste : 19 mai 2017.
- [15] B. NOYELLES : *Cours de Dynamique Céleste et Résonnances*, chapitre 1-3. Université de Namur, 2016-2017.
- [16] G.B. VALSECCHI : *Geometric Conditions for Quasi-Collisions in Öpik's Theory*. Lecture Notes in Physics, 682:145–158, 2006.
- [17] G.B. VALSECCHI, E.M. ALESSI et A. ROSSI : *An Analytical Solution for the Swing-by Problem*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 123:151–166, 2015.

- [18] G.B. Valsecchi, Cl. Froeschlé et R. Gonczi : *Modelling close encounters with Öpik's theory*. Planetary and Space Science, 45:1561–1574, 1997.
- [19] G.B. Valsecchi, A. Milani, G.F. Gronchi et S.R. Chesley : *The Distribution of Energy Perturbations at Planetary Close Encounters*. ICARUS, 75:1–29, 2000.
- [20] G.B. Valsecchi, A. Milani, G.F. Gronchi et S.R. Chesley : *Resonant returns to close approaches : Analytical theory*. Astronomy and Astrophysics, 408:1179–1196, 2003.

Annexe A

L'expression du vecteur vitesse planétocentrique

Nous allons déterminer les composantes et la norme du vecteur vitesse planétocentrique \vec{U} en fonction des éléments orbitaux. Ce vecteur \vec{U} est introduit et utilisé pour décrire le mouvement du petit corps dans le repère planétocentrique, lui-même en mouvement par rapport au repère héliocentrique. Dès lors, notre vecteur \vec{U} est le vecteur vitesse relatif du petit corps dans le référentiel en mouvement. Par la loi de composition des vitesses, présentée dans le cours de Mécanique du point et du solide d'Anne Lemaître [9], nous pouvons écrire le vecteur \vec{U} en fonction du vecteur vitesse absolu du petit corps et du vecteur vitesse d'entraînement du repère en mouvement. La vitesse absolue du petit corps est sa vitesse par rapport au Soleil dans le repère héliocentrique, notée \vec{V} , et celle d'entraînement du référentiel est la vitesse de la planète par rapport au Soleil, notée \vec{V}_p . Nous utiliserons ces vecteurs vitesse ainsi que les vecteurs position de la planète et du petit corps et le vecteur moment cinétique du petit corps pour déterminer les expressions des composantes et de la norme du vecteur \vec{U} . Nous commencerons alors par déterminer les expressions de ces vecteurs dans le repère héliocentrique pour des positions quelconques de la planète et du petit corps. Ensuite, toujours pour des positions quelconques de ces deux corps, nous regarderons ce que deviennent ces expressions dans le référentiel en mouvement et nous en déduirons une première expression pour les composantes du vecteur \vec{U} . Enfin, nous retravaillerons ces composantes en nous plaçant dans le cas particulier d'un contournement entre le petit corps et la planète.

A.1 Les expressions dans le repère héliocentrique

Nous commençons par établir les expressions des vecteurs position et vitesse de la planète et du petit corps par rapport au Soleil et l'expression du moment cinétique du petit corps dans le repère héliocentrique \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 . Nous travaillerons d'abord en considérant que les deux corps sont éloignés l'un de l'autre. Dans ce cas, nous avons un problème des deux corps comme mouvement pour la planète ainsi que pour le petit corps. De plus, nous savons que ce mouvement se situe dans un plan fixe perpendiculaire au moment cinétique constant du corps.

Pour la planète, ce plan est celui déterminé par les axes \vec{e}_1 - \vec{e}_2 , par définition du repère. Dès lors, les composantes du vecteur position de la planète, dans le référentiel héliocentrique, sont

données, sur base de (4.1), par

$$[\vec{r}_p]^{fixe} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_p) \\ \sin(\lambda_p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $[.]^{fixe}$ désigne le repère, ici héliocentrique, dans lequel les composantes sont exprimées. Nous obtenons celles du vecteur vitesse, dans le repère héliocentrique, en dérivant le vecteur position de la planète en fonction du temps.

$$[\vec{V}_p]^{fixe} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_p)\dot{\lambda}_p \\ \cos(\lambda_p)\dot{\lambda}_p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que, la planète ayant une orbite circulaire, $\dot{\lambda}_p$ désigne la vitesse angulaire moyenne de celle-ci. De manière générale, nous nommons la vitesse angulaire moyenne d'un corps "le moyen mouvement" et nous le notons n . De plus, grâce à la troisième loi de Kepler, le moyen mouvement et le demi-grand axe du corps sont liés par

$$\mu = n^2 a^3 \quad (\text{A.2})$$

où μ représente le paramètre du mouvement. Dans le cas de la planète, le demi-grand axe vaut 1 unité et le paramètre du mouvement, qui est défini comme étant le produit entre la constante gravitationnelle et la masse du Soleil, vaut 1. En effet, nous avons supposé que la masse de la planète était négligeable par rapport à celle du Soleil et nous avons choisi nos unités telles que la masse du Soleil et la constante gravitationnelle valent 1. Dès lors, le vecteur vitesse de la planète dans le repère héliocentrique est

$$[\vec{V}_p]^{fixe} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_p) \\ \cos(\lambda_p) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

En revanche, le plan du mouvement du petit corps est le plan contenant son orbite elliptique. Celui-ci est alors incliné de i par rapport au plan de référence du repère \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 . Dans un premier temps, nous allons alors travailler dans un repère orthonormé basé sur ce plan du mouvement. Pour le construire, nous prenons le premier axe tel qu'il contient le périhélie de l'orbite elliptique du petit corps, le deuxième axe pour qu'il se trouve dans le plan formé par l'orbite elliptique. Le troisième axe est alors l'axe parallèle au moment cinétique du petit corps passant par le Soleil. Ce repère est noté \vec{f}_1 - \vec{f}_2 - \vec{f}_3 et est représenté sur la FIGURE A.1.

Dans ce repère et en utilisant les relations (2.14) et (2.15), le vecteur position du petit corps est

$$\begin{aligned} [\vec{r}]^{ellipse} &= \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

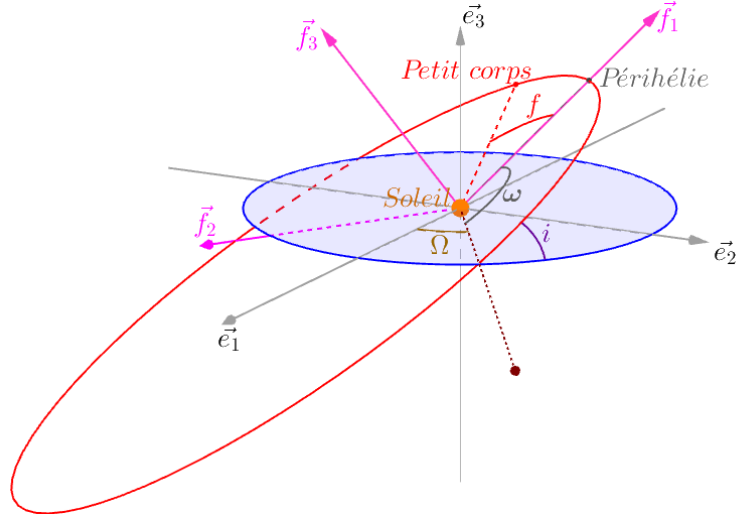


FIGURE A.1 – Représentation du repère orthonormé $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$, dont l'origine est le Soleil, et du repère héliocentrique.

où $[\cdot]^{ellipse}$ nous indique que les composantes du vecteur sont exprimées dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$. En dérivant le vecteur position par rapport au temps, nous obtenons celui de la vitesse, dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$,

$$[\vec{V}]^{ellipse} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin E \dot{E} \\ a \sqrt{1 - e^2} \cos E \dot{E} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or, en dérivant l'équation de Kepler (2.17) et en utilisant la relation (2.16), l'expression de la dérivée de l'anomalie excentrique devient

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{M}{\dot{M}} &= \frac{E - e \sin E}{\dot{E} - e \cos E \dot{E}} \\ &= \frac{\dot{E} (1 - e \cos E)}{\dot{E}} \\ &= n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{E} (1 - e \cos E) = n$$

$$\Rightarrow \quad \dot{E} \frac{r}{a} = n$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{E} = \frac{an}{r}$$

et le vecteur vitesse du petit corps dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$ s'écrit

$$[\vec{V}]^{ellipse} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{y}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a^2 n}{r} \sin E \\ \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Pour obtenir le vecteur moment cinétique du petit corps, nous prenons le produit vectoriel entre son vecteur position et son vecteur vitesse. De plus, grâce à notre choix de repère, nous savons que ce vecteur est parallèle à l'axe \vec{f}_3 . Il s'exprime donc

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma}_1]^{ellipse} &= [\vec{r}]^{ellipse} \times [\vec{V}]^{ellipse} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & 0 \\ \dot{\hat{x}}_1 & \dot{\hat{y}}_1 & 0 \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x}_1 \dot{\hat{y}}_1 - \hat{y}_1 \dot{\hat{x}}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant les composantes des vecteurs position et vitesse du petit corps dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$, données par (A.4) et (A.5) et les relations (2.16) et (A.2), nous pouvons simplifier la troisième composante du vecteur moment cinétique par

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \dot{\hat{y}}_1 - \hat{y}_1 \dot{\hat{x}}_1 &= a(\cos E - e) \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E + a \sqrt{1 - e^2} \sin E \frac{a^2 n}{r} \sin E \\ &= \frac{a^3 n}{r} \sqrt{1 - e^2} (\cos^2 E - e \cos E + \sin^2 E) \\ &= \frac{a^3 n}{r} \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) \\ &= \frac{a^3 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \frac{r}{a} \\ &= a^2 n \sqrt{1 - e^2} \\ &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \end{aligned}$$

De plus, dans notre modèle, nous considérons que la masse du petit corps est négligeable par rapport à celle du Soleil. Dès lors, le paramètre du mouvement est le produit entre la constante gravitationnelle et la masse du Soleil. Étant donné que ces deux quantités valent 1 dans notre système d'unités, ce paramètre du mouvement vaut lui aussi 1. Le vecteur du moment cinétique du petit corps dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$ est alors

$$[\vec{\sigma}_1]^{ellipse} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1 - e^2)} \end{pmatrix}.$$

Dans un deuxième temps, nous déduisons les vecteurs position, vitesse et moment cinétique du petit corps dans le repère $\vec{e}_1\text{-}\vec{e}_2\text{-}\vec{e}_3$. Nous pouvons observer que le passage du repère héliocentrique $\vec{e}_1\text{-}\vec{e}_2\text{-}\vec{e}_3$ vers le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$ se fait grâce à trois rotations. La première est une rotation d'angle Ω autour du troisième axe, la deuxième consiste à tourner les deuxième et troisième axes d'un angle i et la troisième fait tourner le repère autour du troisième axe d'un angle ω . Dès lors, sur

base du rappel sur le changement de repère fait dans la section 1.2, les vecteurs position, vitesse et moment cinétique du petit corps dans le repère héliocentrique sont

$$[\vec{r}]^{fixe} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)[\vec{r}]^{ellipse};$$

$$[\vec{V}]^{fixe} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)[\vec{V}]^{ellipse}; \quad (A.6)$$

$$[\vec{\sigma}_1]^{fixe} = R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)[\vec{\sigma}_1]^{ellipse}. \quad (A.7)$$

A.2 Les expressions dans le repère en mouvement

À présent, nous élaborons les expressions des vecteurs position et vitesse de la planète et celles des vecteurs vitesse et moment cinétique du petit corps dans un repère orthonormé en mouvement autour du Soleil. Celui-ci a comme origine le Soleil et ses axes sont déterminés suite à une rotation d'un angle λ_p autour du troisième axe du référentiel \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 . Nous nommons ce nouveau repère, représenté à la FIGURE A.2, \vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 .

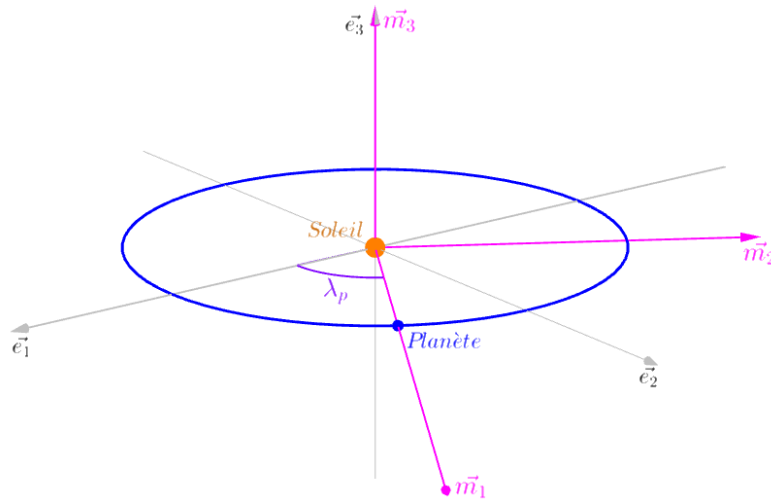


FIGURE A.2 – Représentation du repère orthonormé \vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 dont l'origine est le Soleil et du repère héliocentrique.

Nous commençons par déterminer les composantes des vecteurs position et vitesse de la planète dans ce repère en mouvement. Nous utilisons celles des vecteurs position et vitesse dans le repère héliocentrique, déterminées par (A.1) et (A.3), et le rappel sur le changement de repère de la

section 1.2.

$$\begin{aligned}
[\vec{r}_p]^{mobile} &= R_3(-\lambda_p)[\vec{r}_p]^{fixe} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \lambda_p & \sin \lambda_p & 0 \\ -\sin \lambda_p & \cos \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda_p \\ \sin \lambda_p \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(\lambda_p) + \sin^2(\lambda_p) \\ -\sin \lambda_p \cos \lambda_p + \cos \lambda_p \sin \lambda_p \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

et

$$\begin{aligned}
[\vec{V}_p]^{mobile} &= R_3(-\lambda_p)[\vec{V}_p]^{fixe} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \lambda_p & \sin \lambda_p & 0 \\ -\sin \lambda_p & \cos \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \lambda_p \\ \cos \lambda_p \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin \lambda_p \cos \lambda_p + \sin \lambda_p \cos \lambda_p \\ \sin^2(\lambda_p) + \cos^2(\lambda_p) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $[.]^{mobile}$ indique que les composantes sont exprimées dans le repère en mouvement \vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 .

Ensuite, sur base des composantes trouvées en (A.6) et (A.7), nous déterminons celles des vecteurs vitesse et moment cinétique du petit corps dans le référentiel en mouvement.

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}_1]^{mobile} &= R_3(-\lambda_p)[\vec{\sigma}_1]^{fixe} \\
&= R_3(-\lambda_p)R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)[\vec{\sigma}_1]^{ellipse} \\
&= R_3(-\lambda_p)R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{V}]^{mobile} &= R_3(-\lambda_p)[\vec{V}]^{fixe} \\
&= R_3(-\lambda_p)R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega)[\vec{V}]^{ellipse}.
\end{aligned}$$

Pour alléger les calculs qui vont suivre, nous noterons ces composantes comme

$$[\vec{V}]^{mobile} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.$$

Enfin, grâce à la loi de composition des vitesses, nous pouvons déterminer le vecteur \vec{U} comme étant

$$\begin{aligned}
[\vec{V}]^{mobile} &= [\vec{V}_p]^{mobile} + [\vec{U}]^{mobile} \\
\Rightarrow [\vec{U}]^{mobile} &= [\vec{V}]^{mobile} - [\vec{V}_p]^{mobile} \\
&= \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} V_x \\ V_y - 1 \\ V_z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A.3 Les expressions selon les éléments orbitaux

Jusqu'à présent, nous connaissons les composantes du vecteur \vec{U} quelle que soit la position de la planète et du petit corps. Nous allons maintenant pouvoir les exprimer par rapport aux éléments orbitaux à l'endroit spécifique du contournement de la planète par le petit corps. Pour déterminer nos expressions, nous prendrons le cas d'un contournement s'effectuant sur la ligne des nœuds ascendants du petit corps. À cet endroit, nous savons que

$$\begin{aligned}
\lambda_p &= \Omega \\
f &= -\omega.
\end{aligned}$$

De plus, lors de ce contournement, le petit corps est proche de la planète. Nous sommes alors en mesure d'affirmer que

$$[\vec{r}]^{mobile} = [\vec{r}_p]^{mobile} + [\vec{e}]^{mobile}.$$

En linéarisant la dernière égalité et en utilisant la relation (A.8), nous avons

$$[\vec{r}]^{mobile} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont la norme vaut 1. Nous utilisons ces simplifications et la relation (A.9) pour écrire l'expression du moment cinétique du petit corps dans le repère en mouvement

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}_1]^{mobile} &= R_3(-\Omega)R_3(\Omega)R_1(i)R_3(\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \end{pmatrix} \\
&= R_1(i)R_3(\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \end{pmatrix} \\
&= R_1(i) \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{a(1-e^2)} \sin i \\ \sqrt{a(1-e^2)} \cos i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous la comparons ensuite avec l'expression obtenue de ce vecteur moment cinétique à l'aide du produit vectoriel entre les vecteurs position et vitesse du petit corps dans le repère en mouvement, donnée par

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}_1]^{mobile} &= [\vec{r}]^{mobile} \times [\vec{V}]^{mobile} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ V_x & V_y & V_z \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -V_z \\ V_y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Enfin, nous obtenons

$$\begin{cases} V_y &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i \\ V_z &= \sqrt{a(1-e^2)} \sin i. \end{cases}$$

Dorénavant, nous pouvons déterminer les expressions des composantes et de la norme du vecteur \vec{U} en fonction des éléments orbitaux. Tout d'abord, les composantes U_y et U_z sont

$$\begin{cases} U_y &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i - 1 \\ U_z &= \sqrt{a(1-e^2)} \sin i. \end{cases}$$

Ensuite, pour déterminer la composante \vec{U}_x , nous utilisons la norme du vecteur \vec{U} . Celle-ci est

donnée par

$$\begin{aligned}
\|\vec{U}\|^2 &= U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 \\
&= V_x^2 + (V_y - 1)^2 + V_z^2 \\
&= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 - 2V_y + 1 \\
&= \|\vec{V}\|^2 - 2V_y + 1.
\end{aligned}$$

Or, la norme du vecteur \vec{V} , représentant le vecteur vitesse du petit corps par rapport au Soleil, est invariante par changement de repère. Dès lors, nous utilisons les composantes de ce vecteur dans le repère $\vec{f}_1\text{-}\vec{f}_2\text{-}\vec{f}_3$, données par (A.5), pour déterminer la norme de \vec{V} . En l'incluant dans le calcul de la norme de \vec{U} , nous obtenons

$$\|\vec{U}\|^2 = \frac{a^4 n^2}{r^2} \sin^2 E + \frac{a^4 n^2}{r^2} (1 - e^2) \cos^2 E - 2V_y + 1.$$

Par la relation (A.2) et par les hypothèses de notre modèle, nous savons que

$$\begin{aligned}
a^3 n^2 &= 1 \\
\Rightarrow a^4 n^2 &= a.
\end{aligned}$$

À l'aide de cette information et de la relation donnée en (2.16), l'expression de la norme U , selon les éléments orbitaux, est

$$\begin{aligned}
\|\vec{U}\|^2 &= \frac{a}{r^2} \sin^2 E + \frac{a}{r^2} (1 - e^2) \cos^2 E - 2V_y + 1 \\
&= \frac{a}{r^2} - \frac{ae^2}{r^2} \cos^2 E - 2V_y + 1 \\
&= \frac{a}{r^2} (1 - e^2 \cos^2 E) - 2V_y + 1 \\
&= \frac{a}{r^2} \frac{r}{a} (1 + e \cos E) - 2V_y + 1 \\
&= \frac{1}{r} (1 + e \cos E) - 2V_y + 1 \\
&= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (e \cos E - 1 + 1) - 2V_y + 1 \\
&= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{-r}{a} + 1 \right) - 2V_y + 1 \\
&= \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{r} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i + 1 \\
&= \frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i + 1.
\end{aligned}$$

Grâce à nos simplifications, la norme de \vec{r} , dans le repère mobile, vaut 1 et la norme du vecteur \vec{U} s'écrit finalement

$$\|\vec{U}\|^2 = 3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i.$$

Nous pouvons en déduire l'expression de la composante U_x .

$$\begin{aligned}
U_x^2 &= \|\vec{U}\|^2 - U_y^2 - U_z^2 \\
&= 3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i - a(1-e^2) \cos^2 i - 1 + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i - a(1-e^2) \sin^2 i \\
&= 2 - \frac{1}{a} - a(1-e^2).
\end{aligned}$$

L'expression du vecteur vitesse plan  tocyentrique selon les éléments orbitaux est donc

$$[\vec{U}]^{mobile} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{a} - a(1-e^2)} \\ \sqrt{a(1-e^2)} \cos i - 1 \\ \sqrt{a(1-e^2)} \sin i \end{pmatrix}$$

et sa norme, notée U , est

$$\sqrt{3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i}.$$

Annexe B

Les détails des calculs

Nous détaillons ici les longs calculs des différentes parties du chapitre 4.

B.1 Les expressions des trois premières variables d'Öpik en fonction des éléments orbitaux

Nous commençons par calculer l'expression du cosinus de θ en fonction des éléments orbitaux. Nous utilisons la relation le liant à la deuxième coordonnée cartésienne du vecteur \vec{U} sachant que l'expression de cette deuxième coordonnée en fonction des éléments orbitaux est donnée en (4.8).

$$\begin{aligned} U_y &= U \cos \theta \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{U_y}{U} \\ &= \frac{\sqrt{a(1-e^2)} \cos i - 1}{U}. \end{aligned}$$

En utilisant l'expression du carré de la norme du vecteur de \vec{U} ,

$$U^2 = 3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{3 - \frac{1}{a} - U^2}{2U} - 1 \\ &= \frac{1 - \frac{1}{a} - U^2}{2U}. \end{aligned}$$

En découle, grâce à la formule fondamentale en trigonométrie, l'expression du carré du sinus de θ .

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\
&= 1 - \frac{(1 - U^2)^2 + \frac{1}{a^2} - 2(1 - U^2)\frac{1}{a}}{4U^2} \\
&= \frac{4U^2 - 1 - U^4 + 2U^2 - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 2U^2\frac{1}{a}}{4U^2} \\
&= \frac{-U^4 + 6U^2 - 2U^2\frac{1}{a} - 1 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}}{4U^2}.
\end{aligned}$$

Grâce à la norme de \vec{U} , l'expression devient

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta &= \frac{-\left(3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i\right)^2 + 6\left(3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i\right)}{4U^2} \\
&\quad + \frac{-\frac{2}{a}\left(3 - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i\right) - 1 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}}{4U^2} \\
&= \frac{-\left(3 - \frac{1}{a}\right)^2 - 4a(1 - e^2) \cos^2 i + 4\left(3 - \frac{1}{a}\right)\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i + 18 - \frac{6}{a}}{4U^2} \\
&\quad + \frac{-12\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i - \frac{6}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a}\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i - 1 + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}}{4U^2} \\
&= \frac{-9 - \frac{1}{a^2} + \frac{6}{a} - 4a(1 - e^2) \cos^2 i + 12\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i - \frac{4}{a}\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i}{4U^2} \\
&\quad + \frac{17 - \frac{10}{a} - 12\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i + \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a}\sqrt{a(1 - e^2)} \cos i}{4U^2} \\
&= \frac{2 - a(1 - e^2) \cos^2 i - \frac{1}{a}}{U^2}.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2 - a(1 - e^2) \cos^2 i - \frac{1}{a}}}{U}.$$

Nous prenons la valeur positive de la racine car notre angle θ est défini entre 0° et 180° .

Ensuite, nous déterminons l'expression du sinus de ϕ par rapport aux éléments orbitaux. Nous avons besoin, pour cela, de l'égalité entre le sinus de ϕ et la première coordonnée cartésienne U_x ,

ainsi que de l'expression de cette coordonnée par rapport aux éléments orbitaux, donnée en (4.8).

$$\begin{aligned}
U_x &= U \sin \theta \sin \phi \\
\Rightarrow \sin \phi &= \frac{U_x}{U \sin \theta} \\
&= \pm \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{a} - a(1 - e^2)}}{U \sin \theta}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression du carré du cosinus de ϕ à l'aide de la formule fondamentale trigonométrique.

$$\begin{aligned}
\cos^2 \phi &= 1 - \sin^2 \phi \\
&= 1 - \frac{2 - \frac{1}{a} - a(1 - e^2)}{U^2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{U^2 \sin^2 \theta - 2 + \frac{1}{a} + a(1 - e^2)}{U^2 \sin^2 \theta}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression du sinus de θ au numérateur,

$$\begin{aligned}
\cos^2 \phi &= \frac{2 - a(1 - e^2) \cos^2 i - \frac{1}{a} - 2 + \frac{1}{a} + a(1 - e^2)}{U^2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{a(1 - e^2) \sin^2 i}{U^2 \sin^2 \theta}.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\cos \phi = \pm \frac{\sqrt{a(1 - e^2)} \sin i}{U \sin \theta}.$$

B.2 La distance entre le petit corps et la planète

Nous détaillons ici le calcul permettant d'obtenir l'expression du carré de la distance entre le petit corps et la planète dans la sphère d'influence au temps t quelconque. Nous utilisons les composantes de la position du petit corps au temps t , déterminées grâce à (4.12).

$$\begin{aligned}
D(t)^2 &= x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 \\
&= U^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi (t - t_0)^2 + x_0^2 + 2x_0 U \sin \theta \sin \phi (t - t_0) + U^2 \cos^2 \theta (t - t_0)^2 + y_0^2 \\
&\quad + 2y_0 U \cos \theta (t - t_0) + U^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi (t - t_0)^2 + z_0^2 + 2z_0 U \sin \theta \cos \phi (t - t_0) \\
&= U^2 (t - t_0)^2 [(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta] + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\
&\quad + 2U(t - t_0) [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \\
&= U^2 t^2 + U^2 t_0^2 - 2U^2 t t_0 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2Ut [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \\
&\quad - 2Ut_0 [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \\
&= U^2 t^2 + 2Ut [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - Ut_0] \\
&\quad - 2Ut_0 \left[x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi - \frac{Ut_0}{2} \right] + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.
\end{aligned}$$

B.3 Le carré de la distance au temps t_b

Le minimum de la fonction représentant la distance entre le petit corps et la planète apparaît au temps t_b . Pour obtenir l'expression de cette distance au temps t_b , nous remplaçons $U(t - t_0)$ par $U(t_b - t_0)$ dans $D(t)^2$. Nous obtenons

$$D(t_b)^2 = U^2(t_b - t_0)^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2U(t_b - t_0) [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi].$$

Or, grâce à l'expression de t_b , nous avons

$$U(t_b - t_0) = -(x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} D(t_b)^2 &= (x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi)^2 - 2(x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi)^2 \\ &\quad + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &= -[(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta + y_0 \cos \theta]^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &= -(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi)^2 \sin^2 \theta - y_0^2 \cos^2 \theta - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &= -x_0^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - z_0^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta - 2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta - y_0^2 \cos^2 \theta + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \\ &\quad - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= x_0^2(1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta) + z_0^2(1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta) + y_0^2(1 - \cos^2 \theta) - 2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ &\quad - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= x_0^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + z_0^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta) + y_0^2 \sin^2 \theta - 2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ &\quad - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= x_0^2 \cos^2 \phi + z_0^2 \sin^2 \phi + x_0^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + z_0^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + y_0^2 \sin^2 \theta - 2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ &\quad - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= (x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + 2x_0 z_0 \cos \phi \sin \phi - 2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta \\ &\quad + (x_0^2 \sin^2 \phi + z_0^2 \cos^2 \phi) \cos^2 \theta + y_0^2 \sin^2 \theta - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= (x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + (2x_0 z_0 \sin \phi \cos \phi + x_0^2 \sin^2 \phi + z_0^2 \cos^2 \phi) \cos^2 \theta \\ &\quad + y_0^2 \sin^2 \theta - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= (x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + (x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi)^2 \cos^2 \theta + y_0^2 \sin^2 \theta \\ &\quad - 2y_0(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \sin \theta \cos \theta \\ &= (x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi)^2 + [(x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta]^2. \end{aligned}$$

B.4 Le vecteur position dans le repère lié au b-plan

Nous détaillons ici le passage de l'expression des composantes du vecteur $(\xi_b \ \eta_b \ \zeta_b)^T$ en fonction de la position du petit corps au temps t_b vers celle dépendant de la position du petit corps au temps t_0 . Nous remplaçons la position du petit corps au temps t_b grâce à la relation liant les deux positions de ce corps, donnée en (4.15), dans l'égalité suivante.

$$\begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta_b \\ \zeta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_b \cos \phi - z_b \sin \phi \\ y_b \cos \theta + (x_b \sin \phi + z_b \cos \phi) \sin \theta \\ -y_b \sin \theta + (x_b \sin \phi + z_b \cos \phi) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Pour la première composante, nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi_b &= x_0 \cos \phi - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \sin \phi \cos \phi \\ &\quad - z_0 \sin \phi + [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\ &= x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi.\end{aligned}$$

En développant la deuxième composante, nous trouvons

$$\begin{aligned}\eta_b &= y_0 \cos \theta - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \cos^2 \theta \\ &\quad + (x_0 \sin \phi - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \sin^2 \phi \\ &\quad + z_0 \cos \phi - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \cos^2 \phi) \sin \theta \\ &= y_0 \cos \theta + x_0 \sin \phi \sin \theta + z_0 \cos \phi \sin \theta \\ &\quad - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi] \\ &= x_0 \sin \phi \sin \theta + y_0 \cos \theta + z_0 \cos \phi \sin \theta - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Enfin, la troisième composante est

$$\begin{aligned}\zeta_b &= -y_0 \sin \theta + [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + (x_0 \sin \phi - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \sin^2 \phi \\ &\quad + z_0 \cos \phi - [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] \sin \theta \cos^2 \phi) \cos \theta \\ &= -y_0 \sin \theta + x_0 \sin \phi \cos \theta + z_0 \cos \phi \cos \theta \\ &\quad + [x_0 \sin \theta \sin \phi + y_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta \cos \phi] [\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \sin^2 \phi \cos \theta - \sin \theta \cos^2 \phi \cos \theta] \\ &= (x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta.\end{aligned}$$

Le vecteur position $(\xi_b \ \eta_b \ \zeta_b)^T$, exprimé en fonction de la position du petit corps au temps t_0 et des variables d'Öpik θ et ϕ , est alors

$$\begin{pmatrix} \xi_b \\ \eta_b \\ \zeta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \phi - z_0 \sin \phi \\ 0 \\ (x_0 \sin \phi + z_0 \cos \phi) \cos \theta - y_0 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

B.5 L'expression du sinus de la nouvelle variable θ'

Nous calculons l'expression du sinus de θ' sur base de celle du cosinus de θ' . Par la relation fondamentale trigonométrique, nous lions le carré du sinus et celui du cosinus de θ' .

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta' &= 1 - \cos^2 \theta' \\ \Rightarrow \sin \theta' &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta'}.\end{aligned}$$

De la même manière que la variable d'Öpik θ avant la rencontre, notre angle θ' est défini entre 0° et 180° . La valeur de son sinus est alors positive.

Nous commençons par calculer $1 - \cos^2 \theta'$ à l'aide de l'expression du cosinus de cette nouvelle variable d'Öpik.

$$\begin{aligned}
1 - \cos^2 \theta' &= 1 - \frac{[(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta]^2}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{(b^2 + c^2)^2 - [(b^2 - c^2)^2 \cos^2 \theta + 4c^2 \zeta_b^2 \sin^2 \theta + 4c \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta]}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{b^4 + c^4 + 2b^2 c^2 - b^4 \cos^2 \theta - c^4 \cos^2 \theta + 2b^2 c^2 \cos^2 \theta - 4c^2 \zeta_b^2 \sin^2 \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&\quad - \frac{4c \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{b^4(1 - \cos^2 \theta) + c^4(1 - \cos^2 \theta) + 2b^2 c^2(1 + (1 - \sin^2 \theta)) - 4c^2 \zeta_b^2(1 - \cos^2 \theta)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&\quad - \frac{4c \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{b^4 \sin^2 \theta + c^4 \sin^2 \theta - 2b^2 c^2 \sin^2 \theta + 4b^2 c^2 - 4c^2 \zeta_b^2 + 4c^2 \zeta_b^2 \cos^2 \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&\quad - \frac{4c \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{(b^2 - c^2)^2 \sin^2 \theta + 4c^2 \zeta_b^2 \cos^2 \theta - 4c \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta \sin \theta + 4(b^2 - \zeta_b^2) c^2}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta]^2 + 4(b^2 - \zeta_b^2) c^2}{(b^2 + c^2)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (4.16),

$$1 - \cos^2 \theta' = \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta]^2 + 4\zeta_b^2 c^2}{(b^2 + c^2)^2}.$$

Dès lors,

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta]^2 + 4\zeta_b^2 c^2}}{b^2 + c^2}.$$

B.6 La position du petit corps après rencontre dans le repère planétocentrique

Pour déterminer la position du petit corps après le changement de trajectoire dans le repère planétocentrique, nous nous basons sur l'expression du vecteur position du petit corps après ce changement dans le repère lié au b-plan et sur les rotations permettant de passer du repère planétocentrique à ce dernier. Grâce au rappel sur le changement de repère de la section 1.2, nous

obtenons

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} &= R_2(\phi) R_1(\theta) \begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix}^{b-plan} \\
&= R_2(\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_b \cos \gamma \\ b \sin \gamma \\ \zeta_b \cos \gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_b \cos \gamma \\ b \sin \gamma \cos \theta - \zeta_b \cos \gamma \sin \theta \\ b \sin \gamma \sin \theta + \zeta_b \cos \gamma \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \xi_b \cos \gamma \cos \phi + [b \sin \gamma \sin \theta + \zeta_b \cos \gamma \cos \theta] \sin \phi \\ b \sin \gamma \cos \theta - \zeta_b \cos \gamma \sin \theta \\ -\xi_b \cos \gamma \sin \phi + [b \sin \gamma \sin \theta + \zeta_b \cos \gamma \cos \theta] \cos \phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En remplaçant le cosinus et le sinus de γ par leurs expressions données en (4.19), nous obtenons pour la première composante

$$\begin{aligned}
x'_b &= \xi_b \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \cos \phi + b \frac{2bc}{b^2 + c^2} \sin \theta \sin \phi + \zeta_b \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \cos \theta \sin \phi \\
&= \frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

La deuxième composante devient

$$\begin{aligned}
y'_b &= b \frac{2bc}{b^2 + c^2} \cos \theta - \zeta_b \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \sin \theta \\
&= \frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

Et la simplification de la troisième composante est

$$\begin{aligned}
z'_b &= -\xi_b \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \sin \phi + b \frac{2bc}{b^2 + c^2} \sin \theta \cos \phi + \zeta_b \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} \cos \theta \cos \phi \\
&= \frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2}.
\end{aligned}$$

Le vecteur position du petit corps après le changement de trajectoire exprimé dans le repère \vec{X} - \vec{Y} - \vec{Z} est alors

$$\begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2} \\ \frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \\ \frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2} \end{pmatrix}.$$

B.7 La position du petit corps dans le repère lié au b'-plan

En se basant sur les composantes du vecteur position du petit corps exprimées dans le repère $\vec{X}-\vec{Y}-\vec{Z}$, nous pouvons déterminer celles dans le nouveau référentiel $\vec{\xi}' - \vec{\eta}' - \vec{\zeta}'$ à l'aide des matrices de rotation traduisant le passage du premier vers le deuxième repère. En suivant le rappel sur le changement de repère de la section 1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \xi'_b \\ \eta'_b \\ \zeta'_b \end{pmatrix} &= R_1(-\theta') R_2(-\phi') \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} \\
 &= R_1(-\theta') \begin{pmatrix} \cos \phi' & 0 & -\sin \phi' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi' & 0 & \cos \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_b \\ y'_b \\ z'_b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & \sin \theta' \\ 0 & -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi' x'_b - \sin \phi' z'_b \\ y'_b \\ \sin \phi' x'_b + \cos \phi' z'_b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \phi' x'_b - \sin \phi' z'_b \\ y'_b \cos \theta' + [\sin \phi' x'_b + \cos \phi' z'_b] \sin \theta' \\ -y'_b \sin \theta' + [\sin \phi' x'_b + \cos \phi' z'_b] \cos \theta' \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Or, nous connaissons les expressions des variables θ' et ϕ' ainsi que celles des composantes x'_b , y'_b et z'_b . Nous les remplaçons donc dans chaque composante ci-dessus. Dès lors, nous obtenons, pour la première composante

$$\begin{aligned}
 \xi'_b &= \left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2} \right) \\
 &= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
 &\quad - \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
 &\quad + \frac{4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta \sin^2 \phi + 4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta \cos^2 \phi}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
 &\quad + \frac{2c \xi_b \sin \phi (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi) + 2c \xi_b \cos \phi (b^2 - c^2)(\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2) [\zeta_b \cos \theta \sin \phi \cos \phi + \xi_b \cos^2 \phi - \zeta_b \cos \theta \cos \phi \sin \phi + \xi_b \sin^2 \phi]}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&+ \frac{4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta + 2c \xi_b (b^2 - c^2) [\zeta_b \cos \theta \sin^2 \phi + \xi_b \cos \phi \sin \phi + \zeta_b \cos \theta \cos^2 \phi - \xi_b \sin \phi \cos \phi]}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2) \xi_b + 4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta + 2c \xi_b (b^2 - c^2) \zeta_b \cos \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{(b^2 - c^2)^2 \xi_b \sin \theta - 2c \zeta_b \xi_b (b^2 - c^2) \cos \theta + 4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta + 2c \xi_b \zeta_b (b^2 - c^2) \cos \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{(b^2 - c^2)^2 \xi_b \sin \theta + 4b^2 c^2 \xi_b \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{(b^4 + c^4 - 2b^2 c^2 + 4b^2 c^2) \xi_b \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{(b^2 + c^2)^2 \xi_b \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{\xi_b \sin \theta}{\sin \theta'}.
\end{aligned}$$

La deuxième composante devient

$$\begin{aligned}
\eta'_b &= \left(\frac{(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \right) \left(\frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2) \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \right) + \sin \theta' \\
&\cdot \left[\left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \right. \\
&\cdot \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2} \right) \\
&+ \left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \\
&\cdot \left. \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2} \right) \right] \\
&= \frac{[(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta] [2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2) \zeta_b \sin \theta]}{(b^2 + c^2)^2} + \sin \theta' \\
&\cdot \left[\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] 2b^2 c \sin \theta \sin^2 \phi + [(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] 2b^2 c \sin \theta \cos^2 \phi}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right. \\
&+ \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&\cdot \frac{[(\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi) \sin \phi + (\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi) \cos \phi]}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&+ \left. \frac{-2c \xi_b (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi) \cos \phi + 2c \xi_b (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi) \sin \phi}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta] [2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2) \zeta_b \sin \theta]}{(b^2 + c^2)^2} \\
&+ \left[\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] 2b^2 c \sin \theta}{(b^2 + c^2)^2} \right. \\
&+ \frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&\cdot \frac{[\zeta_b \cos \theta \sin^2 \phi + \xi_b \cos \phi \sin \phi + \zeta_b \cos \theta \cos^2 \phi - \xi_b \sin \phi \cos \phi]}{(b^2 + c^2)^2} \\
&+ \left. \frac{2c \xi_b (b^2 - c^2) (-\zeta_b \cos \theta \sin \phi \cos \phi - \xi_b \cos^2 \phi + \zeta_b \cos \theta \cos \phi \sin \phi - \xi_b \sin^2 \phi)}{(b^2 + c^2)^2} \right] \\
&+ \left[\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] 2b^2 c \sin \theta + [(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2) \zeta_b \cos \theta}{(b^2 + c^2)^2} \right. \\
&\left. - \frac{2c \xi_b^2 (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} \right] \tag{B.1} \\
&= \frac{2b^2 c (b^2 - c^2) \cos^2 \theta + 2b^2 c (b^2 - c^2) \sin^2 \theta - 2c \zeta_b^2 (b^2 - c^2) \sin^2 \theta - 2c \zeta_b^2 (b^2 - c^2) \cos^2 \theta}{(b^2 + c^2)^2} \\
&- \frac{2c \xi_b^2 (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{2b^2 c (b^2 - c^2) - 2c \zeta_b^2 (b^2 - c^2) - 2c \xi_b^2 (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{2b^2 c (b^2 - c^2) - 2c (b^2 - c^2) (\zeta_b^2 + \xi_b^2)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= \frac{2b^2 c (b^2 - c^2) - 2b^2 c (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le petit corps est donc bien dans le b'-plan après le changement de direction de son mouvement rectiligne. La troisième composante, quant à elle, est

$$\begin{aligned}
\zeta'_b &= -\sin \theta' \left(\frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2) \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \right) + \cos \theta' \\
&\cdot \left[\left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \right. \\
&\cdot \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \sin \phi + (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \sin \phi + \xi_b \cos \phi)}{b^2 + c^2} \right) \\
&+ \left(\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(b^2 + c^2) \sin \theta'} \right) \\
&\cdot \left. \left(\frac{2b^2 c \sin \theta \cos \phi + (b^2 - c^2) (\zeta_b \cos \theta \cos \phi - \xi_b \sin \phi)}{b^2 + c^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Or, l'expression entre crochets a déjà été calculée lors de la détermination de l'expression de la composante η'_b et vaut l'expression entre crochets de (B.1) multiplié par l'inverse du sinus de θ' .

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\zeta'_b &= -\sin \theta' \left(\frac{2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \right) + \cos \theta' \\
&\cdot \left[\frac{[(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] 2b^2 c \sin \theta + [(b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] (b^2 - c^2)\zeta_b \cos \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c \xi_b^2 (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right] \\
&= \frac{-\sin \theta' (2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta)}{b^2 + c^2} + \cos \theta' \\
&\cdot \left[\frac{2b^2 c (b^2 - c^2) \sin^2 \theta - 4b^2 c^2 \zeta_b \cos \theta \sin \theta + (b^2 - c^2)^2 \zeta_b \cos \theta \sin \theta - 2c \zeta_b^2 (b^2 - c^2) \cos^2 \theta}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c \xi_b^2 (b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \right] \\
&= \frac{-\sin \theta' (2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta)}{b^2 + c^2} + \cos \theta' \\
&\cdot \frac{2c (b^2 - c^2) (b^2 \sin^2 \theta - \zeta_b^2 \cos^2 \theta - \xi_b^2) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{-\sin \theta' (2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta)}{b^2 + c^2} + \cos \theta' \\
&\cdot \frac{2c (b^2 - c^2) (b^2 \sin^2 \theta - \zeta_b^2 \cos^2 \theta - (b^2 - \zeta_b^2)) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{-\sin \theta' (2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta)}{b^2 + c^2} + \cos \theta' \\
&\cdot \frac{2c (b^2 - c^2) (-b^2 \cos^2 \theta + \zeta_b^2 \sin^2 \theta) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)}{(b^2 + c^2)^2 \sin \theta'} \\
&= \frac{[2c (b^2 - c^2) (-b^2 \cos^2 \theta + \zeta_b^2 \sin^2 \theta) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)] (b^2 + c^2) \cos \theta'}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'} \\
&\quad - \frac{(b^2 + c^2)^2 \sin^2 \theta' (2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta)}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'} \\
&= \frac{[2c (b^2 - c^2) (\zeta_b^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)] (b^2 + c^2) \cos \theta'}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'} \\
&\quad - \frac{(2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta) (b^2 + c^2)^2 (1 - \cos^2 \theta')}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'} \\
&= \frac{\text{num}(\zeta'_b)}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'}.
\end{aligned}$$

En remplaçant le cosinus de θ' par son expression, qui est

$$\cos \theta' = \frac{(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c \zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2},$$

nous pouvons déterminer celle du numérateur de notre troisième composante comme étant

$$\begin{aligned}
& num(\zeta'_b) \\
&= [2c(b^2 - c^2)(\zeta_b^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)] (b^2 + c^2) \\
&\quad \cdot \frac{(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta}{b^2 + c^2} \\
&\quad - [2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta] (b^2 + c^2)^2 \left[1 - \frac{[(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta]^2}{(b^2 + c^2)^2} \right] \\
&= [2c(b^2 - c^2)(\zeta_b^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) + \zeta_b \cos \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)] [(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta] \\
&\quad - [2b^2 c \cos \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta] [(b^2 + c^2)^2 - [(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta]^2] \\
&= 2c(b^2 - c^2)^2(\zeta_b^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) \cos \theta + 4c^2 \zeta_b(b^2 - c^2)(\zeta_b^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \\
&\quad + \zeta_b(b^2 - c^2) \cos^2 \theta \sin \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2) + 2c \zeta_b^2 \cos \theta \sin^2 \theta ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2) \\
&\quad - 2b^2 c(b^2 + c^2)^2 \cos \theta + 2b^2 c \cos \theta [(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta]^2 \\
&\quad + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^2 \zeta_b \sin \theta - (b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta [(b^2 - c^2) \cos \theta + 2c\zeta_b \sin \theta]^2 \\
&= 2c(b^2 - c^2)^2 \zeta_b^2 \sin^2 \theta \cos \theta - 2cb^2(b^2 - c^2)^2 \cos^3 \theta + 4c^2 \zeta_b^3(b^2 - c^2) \sin^3 \theta \\
&\quad - 4c^2 b^2 \zeta_b(b^2 - c^2) \cos^2 \theta \sin \theta \\
&\quad + \zeta_b(b^2 - c^2)^3 \cos^2 \theta \sin \theta - 4b^2 c^2 \zeta_b(b^2 - c^2) \cos^2 \theta \sin \theta + 2c \zeta_b^2(b^2 - c^2)^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
&\quad - 8b^2 c^3 \zeta_b^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
&\quad - 2b^2 c(b^2 + c^2)^2 \cos \theta + 2b^2 c(b^2 - c^2)^2 \cos^3 \theta + 8b^2 c^3 \zeta_b^2 \sin^2 \theta \cos \theta + 8b^2 c^2 \zeta_b(b^2 - c^2) \sin \theta \cos^2 \theta \\
&\quad + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^2 \zeta_b \sin \theta - (b^2 - c^2)^3 \zeta_b \sin \theta \cos^2 \theta - 4c^2 \zeta_b^3(b^2 - c^2) \sin^3 \theta \\
&\quad - 4c \zeta_b^2(b^2 - c^2)^2 \cos \theta \sin^2 \theta \\
&= -2b^2 c(b^2 + c^2)^2 \cos \theta + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^2 \zeta_b \sin \theta.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\zeta'_b &= \frac{(b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^2 \zeta_b \sin \theta - 2b^2 c(b^2 + c^2)^2 \cos \theta}{(b^2 + c^2)^3 \sin \theta'} \\
&= \frac{(b^2 - c^2)\zeta_b \sin \theta - 2b^2 c \cos \theta}{(b^2 + c^2) \sin \theta'}.
\end{aligned}$$

Annexe C

L'expression des fonctions trigonométriques de l'angle γ

Dans cette annexe, nous allons détailler le calcul menant aux expressions du cosinus et du sinus de l'angle γ , ainsi qu'à l'expression de la tangente de la moitié de γ . Pour cela, nous travaillerons sur base de l'hyperbole et de ses asymptotes. En effet, dans la sphère d'influence, le petit corps possède un mouvement hyperbolique que nous simplifions en mouvement rectiligne le long des asymptotes de cette hyperbole. Nous utiliserons alors les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole et l'expression de l'intégrale première de l'énergie dans le cas d'un mouvement hyperbolique. Nous commencerons par lier les éléments connus du petit corps dans le repère basé sur le b-plan aux grandeurs caractéristiques de l'hyperbole. Ensuite, à l'aide de l'intégrale première de l'énergie, nous déterminerons les expressions du sinus et du cosinus de γ , ainsi que celle de la tangente de l'angle $\frac{\gamma}{2}$ en fonction du paramètre d'impact et de la norme du vecteur vitesse planétocentrique.

C.1 Le lien avec les grandeurs caractéristiques de l'hyperbole

Avant de pouvoir déterminer les expressions des fonctions trigonométriques de l'angle γ , nous allons, dans un premier temps, lier le paramètre d'impact aux grandeurs caractéristiques de l'hyperbole. Pour cela, nous allons travailler dans le plan contenant le mouvement hyperbolique du petit corps autour de la planète. En effet, son étude à l'aide d'un problème des deux corps nous garantit que le mouvement se fait bien dans un plan. Pour déterminer ce plan, nous utilisons la FIGURE C.1 reprenant le vecteur \vec{b} et l'angle γ dans le repère lié au b-plan, ainsi que les deux grandeurs caractéristiques de l'hyperbole a_h et e_h . À partir de celle-ci, nous pouvons construire le système d'axes représentant le plan dans lequel nous allons travailler. Nous choisissons le premier axe pour qu'il se situe le long du demi-grand axe a_h de l'hyperbole et le deuxième axe pour qu'il soit perpendiculaire au premier. L'origine sera celle de l'hyperbole. Ce système d'axe est appelé h_1 - h_2 et est représenté à la FIGURE C.2.

Sur cette figure, nous commençons par remarquer la présence de deux segments de droite nommés a_h . Cette double présence est le résultat de la position particulière du petit corps par rapport à la planète lorsqu'il est dans le b-plan. En effet, à cet endroit, le petit corps se situe au plus proche de la planète. Or, si le petit corps était sur l'hyperbole, il serait au plus proche de la planète lorsqu'il se situerait à une distance a_h de l'origine de l'hyperbole. Dès lors, pour être au plus proche de la planète en étant sur l'asymptote de l'hyperbole, le petit corps doit se situer à

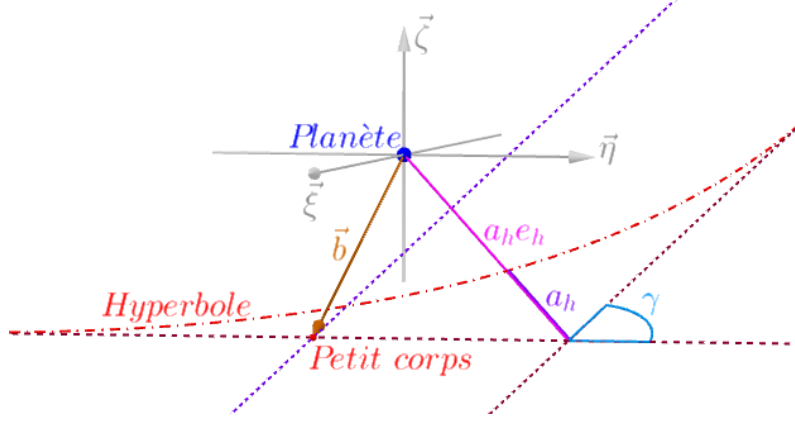


FIGURE C.1 – Représentation des grandeurs caractéristiques a_h et e_h de l’hyperbole dans le repère lié au b -plan ainsi que du vecteur \vec{b} et de l’angle γ .

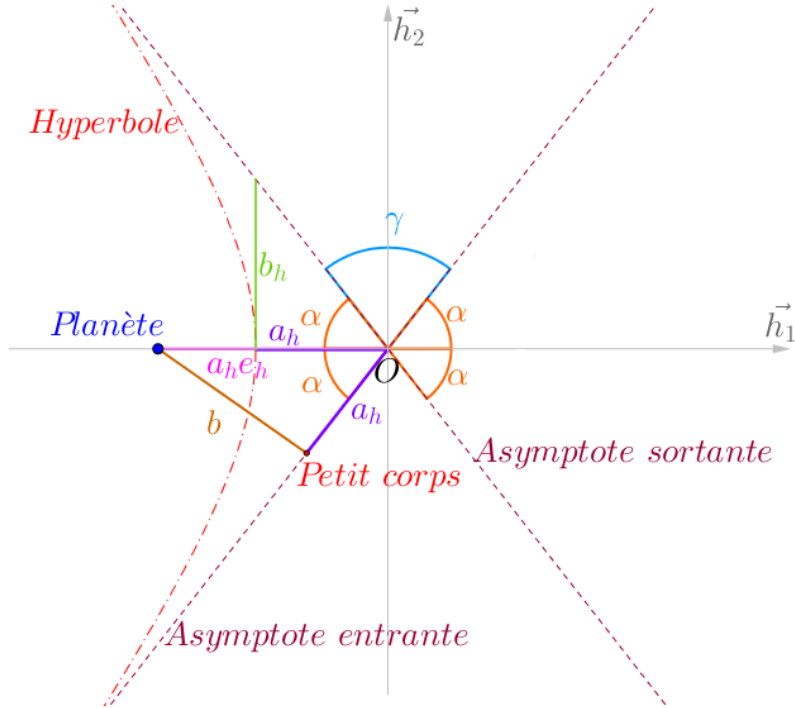


FIGURE C.2 – Représentation du plan contenant l’hyperbole ainsi que ses grandeurs caractéristiques, le paramètre d’impact, l’angle γ et les angles α .

une distance a_h de l’origine de l’hyperbole.

Ensuite, nous ne représentons plus le vecteur \vec{b} mais bien sa norme. De cette manière, nous pouvons la lier à la grandeur caractéristique de l’hyperbole b_h . Tout d’abord, nous savons que le vecteur \vec{b} est perpendiculaire à l’asymptote entrante de l’hyperbole, étant donné que ce vecteur appartient au b -plan, lui-même perpendiculaire à l’asymptote entrante. Nous pouvons donc construire le triangle rectangle représenté à la FIGURE C.3 . Dans ce triangle, et par le théorème de Pythagore, nous avons la relation

$$a_h^2 + b^2 = a_h^2 e_h^2.$$

En remplaçant $a_h^2 e_h^2$ par son expression donnée en (2.18), nous lions le paramètre d’impact b à la

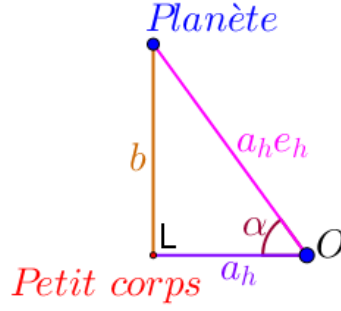


FIGURE C.3 – Représentation du triangle rectangle liant les grandeurs caractéristiques de l’hyperbole au paramètre d’impact. Nous y retrouvons également l’angle α .

grandeur caractéristique de l’hyperbole b_h .

$$\begin{aligned} a_h^2 + b^2 &= a_h^2 + b_h^2 \\ \Rightarrow b^2 &= b_h^2 \\ \Rightarrow b &= b_h \end{aligned}$$

car b représente une norme. Or, la grandeur caractéristique b_h est elle-même liée aux deux autres grandeurs a_h et e_h par la relation donnée en (2.18). Dès lors, notre paramètre d’impact s’exprime selon les grandeurs caractéristiques a_h et e_h par

$$b = a_h \sqrt{e_h^2 - 1}. \quad (\text{C.1})$$

Nous remarquons que celui-ci possède la même expression que le demi-petit axe de l’hyperbole.

Enfin, nous repérons l’angle α sur la FIGURE C.2. Cet angle est défini comme étant l’angle entre le premier axe du repère et les asymptotes de l’hyperbole. De plus, cette conique possède deux symétries axiales, l’une dont l’axe est celui contenant le demi-grand axe de l’hyperbole et l’autre selon l’axe perpendiculaire au premier. Elle possède également une symétrie centrale dont le centre est l’origine de l’hyperbole. Grâce à ces symétries, nous retrouvons l’angle α à quatre endroits de la représentation.

Cet angle α va nous permettre d’exprimer le sinus de la moitié de l’angle γ . En effet, nous constatons que la relation liant ces deux angles est

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi - 2\alpha \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\pi - \gamma}{2}. \end{aligned}$$

Et, en regardant la FIGURE C.3, le cosinus de cet angle est

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_h}{a_h e_h} \\ &= \frac{1}{e_h}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) &= \cos \alpha \\ \Rightarrow \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) &= \frac{1}{e_h}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

À présent, nous exprimons la norme du vecteur vitesse planétocentrique en fonction de la grandeur caractéristique a_h de l'hyperbole ainsi que de la masse de la planète. En étudiant le mouvement du petit corps autour de la planète, nous travaillons avec un problème des deux corps. Nous utilisons alors l'intégrale première de l'énergie de ce problème pour déterminer l'expression recherchée. Cette intégrale première, déterminée en (2.8), s'écrit dans le cas du mouvement hyperbolique du petit corps autour de la planète et en coordonnée cartésienne, comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{r}}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{\tilde{r}} &= \frac{\mu}{2a_h} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\tilde{r}}{dt} \right)^2 &= \frac{2\mu}{\tilde{r}} + \frac{\mu}{a_h} \end{aligned}$$

où \tilde{r} représente la distance entre le petit corps et la planète. Selon Luc Duriez dans son cours [5], le premier terme du membre de droite représente le carré de la vitesse parabolique et le deuxième terme représente le carré de la vitesse à l'infini. Cette dernière désigne la vitesse atteinte par un objet céleste se trouvant en un point à l'infini sur l'hyperbole. Or, à cet endroit, le vecteur vitesse de l'objet se trouve sur une des asymptotes de l'hyperbole. Il se situe soit sur l'asymptote entrante si le corps se dirige vers le foyer de l'hyperbole, soit sur celle sortante s'il s'éloigne de ce foyer. Dès lors, cette vitesse à l'infini est prise, dans notre cas, comme étant la norme du vecteur vitesse \vec{U} et le carré de son expression, liée à la grandeur caractéristique de l'hyperbole, est

$$U^2 = \frac{\mu}{a_h}$$

où μ désigne le paramètre du mouvement du petit corps autour de la planète. Nous pouvons simplifier ce paramètre du mouvement car, dans notre modèle, nous avons supposé que la masse du petit corps était négligeable par rapport à celle de la planète. Dès lors, notre paramètre du mouvement désigne le produit entre la masse de la planète et la constante gravitationnelle. Cette dernière vaut 1 dans le système d'unités choisi. L'expression du carré de la norme U devient alors

$$U^2 = \frac{m_p}{a_h}. \quad (\text{C.3})$$

C.2 Les expressions selon la norme U et le paramètre d'impact

Nous pouvons à présent déterminer l'expression des fonctions sinus et cosinus de l'angle γ sur base de la norme du vecteur vitesse planétocentrique et du paramètre d'impact. Nous savons, par (C.2), que le sinus de la moitié de l'angle γ est lié à la grandeur caractéristique e_h de l'hyperbole. Nous allons alors exprimer cette grandeur caractéristique en fonction du paramètre d'impact et de la norme du vecteur vitesse planétocentrique. Nous l'isolons dans la relation (C.1) et nous remplaçons la grandeur caractéristique a_h par le quotient entre la masse de la planète et le carré de la norme U , sur base de la relation (C.3). Nous obtenons

$$\begin{aligned} b &= a_h \sqrt{e_h^2 - 1} \\ \Leftrightarrow e_h^2 &= \frac{b^2}{a_h^2} + 1 \\ \Rightarrow e_h^2 &= \frac{b^2 U^4}{m_p^2} + 1. \end{aligned}$$

Le carré de l'expression (C.2) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{1}{e_h^2} \\ &= \frac{1}{\frac{b^2 U^4}{m_p^2} + 1} \\ &= \frac{m_p^2}{b^2 U^4 + m_p^2}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule trigonométrique de duplication sur l'angle $\frac{\gamma}{2}$ suivante

$$\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

nous pouvons trouver l'expression du cosinus de γ en fonction de la norme du vecteur vitesse planétocentrique et du paramètre d'impact. Celle-ci vaut

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= 1 - 2 \frac{m_p^2}{b^2 U^4 + m_p^2} \\ &= \frac{b^2 U^4 - m_p^2}{b^2 U^4 + m_p^2} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\end{aligned}$$

où $c = \frac{m_p}{U^2}$.

Nous en déduisons l'expression du sinus de l'angle γ grâce à la formule fondamentale de trigonométrie.

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{b^4 + c^4 + 2b^2 c^2 - b^4 - c^4 + 2b^2 c^2}{(b^2 + c^2)^2}} \\ &= \frac{2bc}{b^2 + c^2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons également déterminer l'expression de la tangente de la moitié de l'angle γ . En effet, en utilisant les formules de Carnot en trigonométrie et les expressions du cosinus et du sinus de l'angle γ , nous pouvons déterminer l'égalité suivante.

$$\begin{aligned}
\tan^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \\
&= \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} \\
&= \frac{1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}}{1 + \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}} \\
&= \frac{2c^2}{2b^2}.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c}{b}.$$

Annexe D

La suite des détails des calculs

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs permettant d'établir différents résultats du chapitre 5.

D.1 L'équation du cercle perpendiculaire à l'axe \vec{X}

Pour établir l'expression de l'équation du cercle rose de la FIGURE 5.4, cercle perpendiculaire à l'axe \vec{X} , nous développons la relation (5.6) en utilisant la relation (5.3).

$$\sin \phi'_* = \frac{[(\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi}{(\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) \sin \theta'_*}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) K_{s*} = (\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \sin \theta \sin \phi - 2c \zeta_b \cos \theta \sin \phi - 2c \xi_b \cos \phi$$

$$\Leftrightarrow -c^2(K_{s*} + \sin \theta \sin \phi) = (\xi_b^2 + \zeta_b^2)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi) + 2c \zeta_b \cos \theta \sin \phi + 2c \xi_b \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \xi_b^2 + \zeta_b^2 + \frac{2c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \zeta_b + \frac{2c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \xi_b + \frac{c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2} + \frac{c^2 \cos^2 \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2} \\ = \frac{-c^2(K_{s*} + \sin \theta \sin \phi)}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} + \frac{c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2} + \frac{c^2 \cos^2 \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2}. \end{aligned}$$

En notant $D_{s1} = \frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi}$ et $D_{s2} = \frac{-c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi}$, nous simplifions l'égalité et obtenons

$$\xi_b^2 + \zeta_b^2 - 2D_{s2} \zeta_b - 2D_{s1} \xi_b + D_{s2}^2 + D_{s1}^2 = \frac{-c^2(K_{s*}^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = \frac{-c^2 [K_{s*}^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi]}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = \frac{c^2(1 - K_{s*}^2)}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2}.$$

En posant $R_s = \left| \frac{c\sqrt{1 - K_{s*}^2}}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right|$, l'équation du cercle rose, perpendiculaire à l'axe \vec{X} , est

$$(\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = R_s^2$$

où

$$\begin{aligned} D_{s1} &= \frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \\ D_{s2} &= \frac{-c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \\ R_s &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{s*}^2}}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right|. \end{aligned}$$

D.2 L'équation du cercle perpendiculaire à l'axe \vec{Z}

L'équation du cercle rouge de la FIGURE 5.4 est déterminée en retravaillant la relation (5.5) à l'aide de l'égalité (5.3).

$$\cos \phi'_* = \frac{[(\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \sin \theta - 2c \zeta_b \cos \theta] \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi}{(\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) \sin \theta'_*}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b^2 + \zeta_b^2 + c^2) K_{c*} = (\xi_b^2 + \zeta_b^2 - c^2) \sin \theta \cos \phi - 2c \zeta_b \cos \theta \cos \phi + 2c \xi_b \sin \phi$$

$$\Leftrightarrow -c^2 (K_{c*} + \sin \theta \cos \phi) = (\xi_b^2 + \zeta_b^2) (K_{c*} - \sin \theta \cos \phi) + 2c \zeta_b \cos \theta \cos \phi - 2c \xi_b \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \xi_b^2 + \zeta_b^2 + \frac{2c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \zeta_b - \frac{2c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \xi_b + \frac{c^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2} + \frac{c^2 \sin^2 \phi}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2} \\ = \frac{-c^2 (K_{c*} + \sin \theta \cos \phi)}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} + \frac{c^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2} + \frac{c^2 \sin^2 \phi}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2}. \end{aligned}$$

En posant $D_{c1} = \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi}$ et $D_{c2} = \frac{-c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi}$, nous obtenons

$$\xi_b^2 + \zeta_b^2 - 2D_{c2} \zeta_b - 2D_{c1} \xi_b + D_{c2}^2 + D_{c1}^2 = \frac{-c^2 (K_{c*}^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) + c^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = \frac{-c^2 [K_{c*}^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi - \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi]}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = \frac{c^2 (1 - K_{c*}^2)}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2}.$$

Dès lors, avec $R_c = \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{c*}^2}}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right|$, l'équation du cercle rouge, perpendiculaire à l'axe \vec{Z} est

$$(\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = R_c^2$$

où

$$\begin{aligned} D_{c1} &= \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ D_{c2} &= \frac{-c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ R_c &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{c*}^2}}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right|. \end{aligned}$$

D.3 Le système composé des trois équations du cercle

Nous allons ici résoudre le système suivant formé des trois équations des cercles (5.4), (5.7) et (5.8).

$$\begin{cases} \xi_b^2 + (\zeta_b - D)^2 = R^2 \\ (\xi_b - D_{s1})^2 + (\zeta_b - D_{s2})^2 = R_s^2 \\ (\xi_b - D_{c1})^2 + (\zeta_b - D_{c2})^2 = R_c^2 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} D &= \frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} & D_{s1} &= \frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} & D_{c1} &= \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ R &= \left| \frac{c \sin \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right| & D_{s2} &= \frac{-c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} & D_{c2} &= \frac{-c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \\ & & R_s &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{s*}^2}}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right| & R_c &= \left| \frac{c \sqrt{1 - K_{c*}^2}}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right|. \end{aligned}$$

Nous commençons par développer les équations formant ce système.

$$\begin{cases} \xi_b^2 + \zeta_b^2 = 2D\zeta_b - D^2 + R^2 \\ \xi_b^2 + \zeta_b^2 - 2D_{s1}\xi_b - 2D_{s2}\zeta_b + D_{s1}^2 + D_{s2}^2 = R_s^2 \\ \xi_b^2 + \zeta_b^2 - 2D_{c1}\xi_b - 2D_{c2}\zeta_b + D_{c1}^2 + D_{c2}^2 = R_c^2. \end{cases}$$

Ensuite, nous remplaçons $\xi_b^2 + \zeta_b^2$ de la deuxième équation par le membre de droite de la première équation. Nous pouvons alors développer la deuxième équation seule et nous obtenons

$$\begin{aligned} R_s^2 &= 2D\zeta_b - D^2 + R^2 - 2D_{s1}\xi_b - 2D_{s2}\zeta_b + D_{s1}^2 + D_{s2}^2 \\ \Leftrightarrow \xi_b &= \frac{2(D - D_{s2})\zeta_b - D^2 + R^2 + D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - R_s^2}{2D_{s1}} \\ \Leftrightarrow \xi_b &= \frac{(D - D_{s2})}{D_{s1}}\zeta_b + \frac{D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - D^2 + R^2 - R_s^2}{2D_{s1}}. \end{aligned}$$

Nous procédons de la même manière dans la troisième équation. Son développement seul nous donne

$$\begin{aligned} R_c^2 &= 2D\zeta_b - D^2 + R^2 - 2D_{c1}\xi_b - 2D_{c2}\zeta_b + D_{c1}^2 + D_{c2}^2 \\ \Leftrightarrow \xi_b &= \frac{2(D - D_{c2})\zeta_b - D^2 + R^2 + D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - R_c^2}{2D_{c1}} \\ \Leftrightarrow \xi_b &= \frac{(D - D_{c2})}{D_{c1}}\zeta_b + \frac{D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - D^2 + R^2 - R_c^2}{2D_{c1}}. \end{aligned}$$

Dès lors, notre système d'équations à résoudre devient

$$\begin{cases} \xi_b^2 + \zeta_b^2 = 2D\zeta_b - D^2 + R^2 \\ \xi_b = \frac{(D - D_{s2})}{D_{s1}}\zeta_b + \frac{D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - D^2 + R^2 - R_s^2}{2D_{s1}} \\ \xi_b = \frac{(D - D_{c2})}{D_{c1}}\zeta_b + \frac{D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - D^2 + R^2 - R_c^2}{2D_{c1}}. \end{cases}$$

Dans ce système, les deux dernières équations ont leur membre de gauche identique. Ainsi, nous pouvons évaluer leur membre de droite et nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{(D - D_{s2})}{D_{s1}} \zeta_b + \frac{D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - D^2 + R^2 - R_s^2}{2D_{s1}} = \frac{(D - D_{c2})}{D_{c1}} \zeta_b + \frac{D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - D^2 + R^2 - R_c^2}{2D_{c1}} \\
\Leftrightarrow & \frac{[(D - D_{s2})D_{c1} - (D - D_{c2})D_{s1}]}{D_{s1}D_{c1}} \zeta_b = \frac{(D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - D^2 + R^2 - R_c^2) D_{s1}}{2D_{s1}D_{c1}} \\
& \quad - \frac{(D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - D^2 + R^2 - R_s^2) D_{c1}}{2D_{s1}D_{c1}} \\
\Leftrightarrow & \zeta_b = \frac{(D_{c1}^2 + D_{c2}^2 - D^2 + R^2 - R_c^2) D_{s1} - (D_{s1}^2 + D_{s2}^2 - D^2 + R^2 - R_s^2) D_{c1}}{2[(D - D_{s2})D_{c1} - (D - D_{c2})D_{s1}]} \\
\Leftrightarrow & \zeta_b = \frac{num(\zeta_b)}{denum(\zeta_b)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors remplacer D , D_{c1} , D_{c2} , D_{s1} et D_{s2} par leurs expressions. Nous commençons par le numérateur de ζ_b . Son expression, à l'aide de la formule fondamentale en trigonométrie, est

$$\begin{aligned}
num(\zeta_b) &= \left[\frac{c^2 \sin^2 \phi + c^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - c^2(1 - K_{c*}^2)}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2} + \frac{c^2 \sin^2 \theta'_* - c^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \right] D_{s1} \\
&\quad - \left[\frac{c^2 \cos^2 \phi + c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi - c^2(1 - K_{s*}^2)}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2} + \frac{c^2 \sin^2 \theta'_* - c^2 \sin^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \right] D_{c1} \\
&= \left[\frac{-c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + c^2 K_{c*}^2}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)^2} + \frac{c^2 - c^2 \cos^2 \theta'_* - c^2 + c^2 \cos^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \right] D_{s1} \\
&\quad - \left[\frac{-c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 K_{s*}^2}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)^2} + \frac{c^2 - c^2 \cos^2 \theta'_* - c^2 + c^2 \cos^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \right] D_{c1} \\
&= c^2 \left[\frac{K_{c*} + \sin \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} - \frac{\cos \theta + \cos \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right] D_{s1} \\
&\quad - c^2 \left[\frac{K_{s*} + \sin \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} - \frac{\cos \theta + \cos \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right] D_{c1} \\
&= c^2 \left[\frac{K_{c*} + \sin \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} - \frac{\cos \theta + \cos \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right] \left(\frac{-c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right) \\
&\quad - c^2 \left[\frac{K_{s*} + \sin \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} - \frac{\cos \theta + \cos \theta'_*}{\cos \theta'_* - \cos \theta} \right] \left(\frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right) \\
&= c^3 \left[\frac{(K_{c*} + \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(-\cos \phi) + \cos \phi(\cos \theta + \cos \theta'_*)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)} \right] \\
&\quad + c^3 \left[\frac{-(K_{s*} + \sin \theta \sin \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta) \sin \phi + (\cos \theta + \cos \theta'_*)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi) \sin \phi}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^3 \left[\frac{(\cos \theta'_* - \cos \theta) (-K_{c*} \cos \phi - \sin \theta \cos^2 \phi - K_{s*} \sin \phi - \sin \theta \sin^2 \phi)}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)} \right] \\
&\quad + c^3 \left[\frac{(\cos \theta + \cos \theta'_*) (K_{c*} \cos \phi - \sin \theta \cos^2 \phi + K_{s*} \sin \phi - \sin \theta \sin^2 \phi)}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right] \\
&= c^3 \left[\frac{\cos \theta'_* (-K_{c*} \cos \phi - \sin \theta - K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi - \sin \theta + K_{s*} \sin \phi)}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)} \right] \\
&\quad + c^3 \left[\frac{\cos \theta (K_{c*} \cos \phi + \sin \theta + K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi - \sin \theta)}{(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right] \\
&= 2c^3 \left[\frac{(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta - \sin \theta \cos \theta'_*}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)} \right].
\end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons retravailler le dénominateur

$$\begin{aligned}
denum(\zeta_b) &= 2 \left[\left(\frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} + \frac{c \cos \theta \sin \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right) \frac{c \sin \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta} + \frac{c \cos \theta \cos \phi}{K_{c*} - \sin \theta \cos \phi} \right) \frac{c \cos \phi}{K_{s*} - \sin \theta \sin \phi} \right] \\
&= 2c^2 \left[\frac{\sin \theta \sin \phi (K_{s*} - \sin \theta \sin \phi) + \cos \theta \sin^2 \phi (\cos \theta'_* - \cos \theta)}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin \theta \cos \phi (K_{c*} - \sin \theta \cos \phi) + \cos \theta \cos^2 \phi (\cos \theta'_* - \cos \theta)}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right] \\
&= 2c^2 \left[\frac{K_{s*} \sin \theta \sin \phi - \sin^2 \theta \sin^2 \phi + K_{c*} \sin \theta \cos \phi - \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos \theta \cos \theta'_* - \cos^2 \theta}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right] \\
&= 2c^2 \left[\frac{(K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta + \cos \theta \cos \theta'_* - 1}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right].
\end{aligned}$$

Dès lors, notre variable d'Öpik ζ_b est

$$\begin{aligned}
\zeta_b &= \frac{2c^3 \left[\frac{(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta - \sin \theta \cos \theta'_*}{(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)} \right]}{2c^2 \left[\frac{(K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta + \cos \theta \cos \theta'_* - 1}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)(K_{s*} - \sin \theta \sin \phi)(K_{c*} - \sin \theta \cos \phi)} \right]} \\
&= \frac{c [\sin \theta \cos \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta]}{1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent déterminer l'expression de la variable d'Öpik ξ_b à l'aide de la première équation de notre système.

$$\begin{aligned}
\xi_b^2 &= R^2 - (\zeta_b - D)^2 \\
&= \frac{c^2 \sin^2 \theta'_*}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} - \left[\underbrace{\frac{c [\sin \theta \cos \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta]}{1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*} - \frac{c \sin \theta}{\cos \theta'_* - \cos \theta}}_I \right]^2.
\end{aligned}$$

Cette expression est assez longue, nous allons donc la simplifier étape par étape. Nous commençons par travailler l'expression entre crochets, notée I .

$$\begin{aligned}
I &= \frac{c(\cos \theta'_* - \cos \theta) [\sin \theta \cos \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta]}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)(\cos \theta'_* - \cos \theta)} \\
&\quad - \frac{c \sin \theta (1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)(\cos \theta'_* - \cos \theta)} \\
&= \frac{c \cos^2 \theta'_* \sin \theta - c(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta \cos \theta'_* + c(K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) - c \sin \theta}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)(\cos \theta'_* - \cos \theta)} \\
&= \frac{c [-\sin^2 \theta'_* \sin \theta + (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) (1 - \cos \theta \cos \theta'_*)]}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)(\cos \theta'_* - \cos \theta)}.
\end{aligned}$$

En la remplaçant dans l'expression de ξ_b , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\xi_b^2 &= \frac{c^2 \sin^2 \theta'_*}{(\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} - \frac{c^2 [(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) (1 - \cos \theta \cos \theta'_*) - \sin^2 \theta'_* \sin \theta]^2}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \\
&= \frac{\overbrace{c^2 \sin^2 \theta'_* (1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2}^{J^2}}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \\
&\quad - \frac{\overbrace{c^2 [(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) (1 - \cos \theta \cos \theta'_*) - \sin^2 \theta'_* \sin \theta]^2}^{L^2}}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2}.
\end{aligned}$$

Nous allons à présent travailler uniquement sur les numérateurs de ces deux fractions. Pour ce faire, nous notons le numérateur de la première fraction J^2 et le numérateur de la deuxième fraction L^2 . Dès lors,

$$\begin{aligned}
J^2 - L^2 &= c^2 \sin^2 \theta'_* [(1 - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 + (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi)^2 \sin^2 \theta \\
&\quad - 2(1 - \cos \theta \cos \theta'_*)(K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta] \\
&\quad - c^2 [(K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi)^2 (1 - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 + \sin^4 \theta'_* \sin^2 \theta \\
&\quad - 2 \sin^2 \theta'_* \sin \theta (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) (1 - \cos \theta \cos \theta'_*)] \\
&= c^2 [\sin^2 \theta'_* ((1 - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \theta'_*) \\
&\quad + (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi)^2 (\sin^2 \theta \sin^2 \theta'_* - (1 - \cos \theta \cos \theta'_*)^2)] \\
&= c^2 [(1 - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 - \sin^2 \theta \sin^2 \theta'_*] [\sin^2 \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi)^2] \\
&= c^2 [1 + \cos^2 \theta \cos^2 \theta'_* - 2 \cos \theta \cos \theta'_* - (1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta'_*)] \\
&\quad [\sin^2 \theta'_* - K_{c*}^2 \cos^2 \phi - K_{s*}^2 \sin^2 \phi - 2K_{c*}K_{s*} \cos \phi \sin \phi].
\end{aligned}$$

Nous remplaçons à présent les quantités K_{c*}^2 par son expression $(\sin \theta'_* \cos \phi'_*)^2$ et K_{s*}^2 par son

expression $(\sin \theta'_* \sin \phi'_*)^2$. Le développement devient alors

$$\begin{aligned}
J^2 - L^2 &= c^2 [\cos^2 \theta + \cos^2 \theta'_* - 2 \cos \theta \cos \theta'_*] \\
&\quad [\sin^2 \theta'_* - \sin^2 \theta'_* \cos^2 \phi'_* (1 - \sin^2 \phi) - \sin^2 \theta'_* \sin^2 \phi'_* \sin^2 \phi - 2K_{c*}K_{s*} \cos \phi \sin \phi] \\
&= c^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2 [\sin^2 \theta'_* (1 - \cos^2 \phi'_* + \cos^2 \phi'_* \sin^2 \phi - \sin^2 \phi'_* \sin^2 \phi) - 2K_{c*}K_{s*} \cos \phi \sin \phi] \\
&= c^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2 [\sin^2 \theta'_* (\sin^2 \phi'_* \cos^2 \phi + \cos^2 \phi'_* \sin^2 \phi) - 2K_{c*}K_{s*} \cos \phi \sin \phi] \\
&= c^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2 [K_{s*}^2 \cos^2 \phi + K_{c*}^2 \sin^2 \phi - 2K_{c*}K_{s*} \cos \phi \sin \phi] \\
&= c^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2 (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)^2.
\end{aligned}$$

En le remplaçant dans l'expression du ξ_b^2 , nous pouvons déterminer celle de la variable d'Öpik.

$$\begin{aligned}
\xi_b^2 &= \frac{c^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2 (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)^2}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2 (\cos \theta'_* - \cos \theta)^2} \\
&= \frac{c^2 (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)^2}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)^2} \\
\Rightarrow \xi_b &= \frac{c (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)}.
\end{aligned}$$

Nos deux inconnues du système d'équation sont donc

$$\begin{aligned}
\xi_b &= \frac{c (K_{c*} \sin \phi - K_{s*} \cos \phi)}{(1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*)} \\
\zeta_b &= \frac{c [\sin \theta \cos \theta'_* - (K_{c*} \cos \phi + K_{s*} \sin \phi) \cos \theta]}{1 - (K_{s*} \sin \phi + K_{c*} \cos \phi) \sin \theta - \cos \theta \cos \theta'_*}.
\end{aligned}$$